WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. November 2006

a) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$$\dot y(t) + 2ty(t) = 4t \quad (1) \qquad \dot y(t) + \tfrac{y(t)}{t} + e^t = 0 \quad (2)$$
$$\dot y(t) = a + bt + cy(t) \quad (3) \qquad (1+t)\dot y(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0 \quad (4)$$
$$\dot y(t) + y(t) = 2\sin t \quad (5) \qquad \dot y(t) + \sin t\, y(t) = \sin^3 t \quad (6)$$

b) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\dot y(t) = \cos y(t),\ y(0) = 0 \quad (1) \qquad 2\dot y(t)y(t) = 1,\quad y(0) = 0 \quad (2)$$
$$\dot y(t) = \tfrac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}},\ y(0) = 0 \quad (3) \qquad \dot y(t) = \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1+t^8},\ y(0) = 1 \quad (4)$$
$$\dot y(t)^2 = 4y(t),\quad y(0) = 0 \quad (5) \qquad \dot y(t) = \frac{1}{y(t)},\quad y(0) = 1 \quad (6)$$

c) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen, und überlegen Sie sich, wo t liegen muß, damit diese Lösungen existieren:

$$\dot y(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \quad (1) \qquad \dot y(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \quad (2) \qquad \dot y(t) = e^{t+y(t)} \quad (3)$$
$$\dot y(t) = t^2 y(t)^2 \quad (4) \qquad \dot y(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \quad (5) \qquad \dot y(t) = \frac{1+y(t)^2}{1+t^2} \quad (6)$$

Hinweis zu (6)*:* $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

d) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\dot y(t) = \frac{t}{y(t)} \quad \text{mit}\quad y(0) = 3 \quad\text{und mit}\quad y(0) = -3 \quad (1)$$
$$\dot y(t) = \sin^2 t \cdot \cos^2 y(t) \quad \text{mit}\quad y(0) = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$
$$\dot y(t) = 1 + y(t)^2 \quad \text{mit}\quad y(0) = 0 \quad\text{und mit}\quad y(0) = 1 \quad (3)$$
$$y(t)\,\dot y(t) + \big(1 + y(t)^2\big)\sin t = 0 \quad \text{mit}\quad y(0) = 1 \quad (4)$$

e) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t gemäß dem Gesetz $\dot N(t) = aN(t)^b$ wachsen sollte mit $a > 0$ und $b > 1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!

f) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!

g) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante C mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?

h) Finden Sie eine Differentialgleichung mit den Hyperbeln $y^2 - t^2 = C$ als Lösungskurven!

i) *Ditto* für die Lemniskaten $(y^2 + t^2)^2 = 2C^2(t^2 - y^2)$! *(Hier kann man viel kürzen!)*

j) Hat diese Differentialgleichung auch noch weitere Lösungskurven?

k) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen wenn möglich explizit, und diskutieren Sie ansonsten, wo die implizite Lösung eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

$$t\dot y(t) + y(t) = 0 \quad (1) \qquad (1+t^2)\dot y(t) + 2ty(t) = 0 \quad (2)$$
$$t\dot y(t) + y(t) + e^t = 0 \quad (3) \qquad \big((te^{y(t)} + 2y(t)\big)\dot y(t) + e^{y(t)} = 0 \quad (4)$$
$$8ty(t)\sin\big(4y(t)^2\big)\dot y(t) = \cos\big(4y(t)^2\big) \quad (5) \qquad \big(t\cos y(t)\big) + \sin y(t) = 0 \quad (6)$$
$$y(t)\sqrt{1-t^2}\,\dot y(t) = t \quad (7) \qquad \big(ty(t) - t\big)\dot y(t) + t = 0 \quad (8)$$
$$\big(3t + 3 - y(t)\big)\dot y(t) + y = 0 \quad (9) \qquad \big(y(t)^2 - t^2\big)\dot y(t) + 2ty(t) = 0 \quad (10)$$