WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. November 2006

a) Bestimmen Sie die sämtlichen reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 40\sin 3t \tag{1}$$
$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = \cos t \tag{2}$$
$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 80\sin 3t \tag{3}$$
$$y^{(4)}(t) - 16y(t) = 80 - 48t \tag{4}$$
$$y^{(4)}(t) + 8\ddot{y}(t) + 16y(t) = 400 \tag{5}$$

Lösung: (1) hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = (\lambda + 2)^2 + 9 = 0$$

mit den beiden Wurzeln $-2 \pm 3i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also eine Linearkombination der beiden Funktionen $e^{-2t}\cos 3t$ und $e^{-2t}\sin 3t$.

Da (1) die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung mit nichtverschwindendem Dämpfungsterm ist, wissen wir, daß es eine ungedämpfte Lösung gibt, die mit der anregenden Frequenz schwingt. Setzen wir

$$y(t) = a\cos 3t + b\sin 3t\,,$$

so ist $\dot{y}(t) = -3a\sin 3t + 3b\cos 3t$ und $\ddot{y}(t) = -9a\cos 3t - 9b\sin 3t$, also

$$y(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = (4a + 12b)\cos 3t + (4b - 12a)\sin 3t\,.$$

Dies muß gleich der rechten Seite von (1) sein, d.h.

$$4a + 12b = 0 \quad \text{und} \quad 4b - 12a = 40\,.$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $a = -3b$, und damit wird die zweite zu $4b + 36b = 40$, d.h. $b = 1$ und $a = -3$. Die allgemeine Lösung von (1) ist daher

$$y(t) = -3\cos 3t + \sin 3t + e^{-2t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die charakteristische Gleichung von (2) ist

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$$

mit der dreifachen Nullstelle $\lambda = -1$; der Lösungsraum der der homogenen Gleichung wird also aufgespannt von e^{-t}, te^{-t} und t^2e^{-t}.

Da die rechte Seite eine reine Schwingung ist, können wir spekulieren, daß es unter den Lösungen von (2) vielleicht eine reine Schwingung derselben Frequenz gibt, versuchen also unser Glück mit dem Ansatz $y(t) = a\cos t + b\sin t$. Dann ist

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = (2b - 2a)\cos t - (2a + 2b)\sin t\,;$$

unsere Spekulation war somit erfolgreich, falls wir $a, b \in \mathbb{R}$ finden können mit $2(b-a) = 1$ und $a+b = 0$. Einsetzen von $b = -a$ in die erste Gleichung ergibt $-4a = 1$, also ist $a = -\frac{1}{4}$ und $b = \frac{1}{4}$. Damit kennen wir die allgemeine Lösung

$$y(t) = -\frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\sin t + e^{-t}(C_0 + C_1 t + C_2 t^2) \quad \text{mit} \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ von (3) hat offensichtlich die Nullstelle $\lambda = -1$; Division der rechten Seite durch $(\lambda + 1)$ oder der Satz von VIÈTE zeigen, daß $\lambda = \pm i$ die beiden anderen sind. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y(t) = C_0 e^{-t} + C_1 \cos t + C_2 \sin t \quad \text{mit} \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Der Ansatz

$$y(t) = a\cos 3t + b\sin 3t$$

für eine reine Schwingung mit der Kreisfrequenz drei der rechten Seite führt auf

$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = -(8a + 24b)\cos 3t + (24a - 8b)\sin 3t\,.$$

Dies ist gleich $80\sin 3t$, wenn $8a + 24b = 0$, also $a = -3b$ und $24a - 8b = 80$ oder $-80b = 80$, also $b = -1$ ist. Damit kennen wir die allgemeine Lösung

$$y(t) = 3\cos 3t - \sin 3t + C_0 e^{-t} + C_1 \cos t + C_2 \sin t \quad \text{mit} \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(4) hat die charakteristische Gleichung $\lambda^4 - 16 = 0$ mit Wurzeln ± 2 und $\pm 2i$; die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t\,.$$

Die rechte Seite von (4) ist linear; wir könnten also rein spekulativ versuchen, ob es vielleicht eine lineare Lösung $y(t) = at + b$ gibt. Deren vierte Ableitung verschwindet natürlich, d.h. für eine solche Lösung müßte

$$-16y(t) = 80 - 48t \quad \text{oder} \quad y(t) = 3t - 5$$

sein. Da die vierte Ableitung dieser Funktion verschwindet, ist sie tatsächlich eine Lösung. Die allgemeine Lösung von (4) ist somit

$$y(t) = 3t - 5 + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

(5) schließlich hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

mit den jeweils doppelten Nullstellen $\lambda = \pm 2i$. Der Lösungsraum der homogenen Gleichung wird also aufgespannt von den Funktionen

$$\cos 2t, \quad \sin 2t, \quad t\cos 2t \quad \text{und} \quad t\sin 2t\,.$$

Wenn wir sehr mutig sind, können wir hoffen, daß es vielleicht eine konstante Lösng von (5) gibt. Deren sämtliche Ableitungen verschwinden, also muß $16y(t) = 400$ oder $y(t) \equiv 50$ sein, was die Differentialgleichung auch tatsächlich löst. Die allgemeine Lösung von (5) ist daher

$$y(t) = 50 + (C_1 t + C_2)\cos 2t + (C_3 t + C_4)\sin 2t \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Lösen Sie die Differenzengleichung $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$ mit $x_0 = 3$ und $x_1 = 5$!

Lösung: Das charakteristische Polynom $\lambda^2-\lambda+1$ hat die Nullstellen $\lambda_{1/2}=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, d.h.

$$x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{C}\,.$$

Die Bedingungen $x_0 = 3$ und $x_1 = 5$ führen auf das lineare Gleichungssystem

$$a+b=3 \quad \text{und} \quad \frac{a}{2}(1+i\sqrt{3})+\frac{b}{2}(1-i\sqrt{3})=\frac{a+b}{2}+\frac{i(a-b)\sqrt{3}}{2}=5\,.$$

Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung gibt

$$\frac{i(a-b)\sqrt{3}}{2}=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2} \quad \text{oder} \quad a-b=\frac{7}{i\sqrt{3}}=-\frac{7i\sqrt{3}}{3}\,.$$

Zusammen mit $a+b=3$ ergibt dies

$$a=\frac{1}{2}\left(3-\frac{7i\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{und} \quad b=\frac{1}{2}\left(3+\frac{7i\sqrt{3}}{3}\right)\,.$$

Also ist

$$x_n=\frac{1}{2}\left(3-\frac{7i\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(3+\frac{7i\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n\,.$$

c) Was ist $x_{1\,000\,000}$?

Lösung: Da $\lambda_{1/2}^3=-1$ ist, ist $\lambda_{1/2}^6=1$, d.h. x_n ist periodisch mit Periode sechs. Somit ist $x_{1\,000\,000}=x_4$. Dies läßt sich am schnellsten über die Rekursionsvorschrift berechnen:

$$x_2=x_1-x_0=2, \quad x_3=x_2-x_1=-1, \quad x_4=x_3-x_2=-3\,.$$

Also ist $x_{1\,000\,000}=-3$.

d) Formen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t)=2t\cdot\big(y(t)-2\big)$ mit $y(0)=1$ um in eine Fixpunktgleichung, und berechnen Sie die ersten Iterationen! Erraten Sie anhand dieser die Lösungsfunktion, und bestätigen Sie dies durch Einsetzen!

Lösung: Wir schreiben die Differentialgleichung um in

$$y(t)=1+\int_0^t 2\tau\cdot\big(y(\tau)-2\big)\,d\tau$$

und beginnen mit der konstanten Funktion $y_0(t)\equiv 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
y_1(t)&=1+\int_0^t 2\tau\cdot\big(y_0(\tau)-2\big)\,d\tau=1+\int_0^t(-2\tau)\,d\tau=1-t^2\\
y_2(t)&=1+\int_0^t 2\tau\cdot\big(y_1(\tau)-2\big)\,d\tau=1+\int_0^t 2\tau(-1-\tau^2)\,d\tau=1-t^2-\frac{t^4}{2}\\
y_3(t)&=1+\int_0^t 2\tau\cdot\big(y_2(\tau)-2\big)\,d\tau=1+\int_0^t 2\tau(-1-\tau^2-\tfrac{1}{2}\tau^4)\,d\tau=1-t^2-\frac{t^4}{2}-\frac{t^6}{6}\,.
\end{aligned}$$

Dies sieht nach Fakultäten im Nenner aus, allerdings sind die Exponenten doppelt so groß wie bei der Exponentialfunktion und auch die Vorzeichen sind, abgesehen vom ersten, minus statt plus. Also müssen wir e^{t^2} betrachten und dies geeignet modifizieren:

$$-e^{t^2} = -1 - t^2 - \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} - \cdots \quad \Longrightarrow \quad 2 - e^{t^2} = 1 - t^2 - \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} - \cdots \; .$$

Wir können daher unser Glück versuchen mit $y(t) = 2 - e^{t^2}$: Dann ist

$$\dot{y}(t) = -2te^{t^2} = 2t(-e^{t^2}) = 2t\big(y(t) - 2\big)\,,$$

die erratene Funktion ist also tatsächlich eine Lösung.

e) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$\dot{y}(t) + 2ty(t) = 4t$	(1)	$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{t} + e^t = 0$	(2)
$\dot{y}(t) = a + bt + cy(t)$	(3)	$(1+t)\dot{y}(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0$	(4)
$\dot{y}(t) + y(t) = 2\sin t$	(5)	$\dot{y}(t) + \sin t\, y(t) = \sin^3 t$	(6)

Lösung: (1) – (6) sind inhomogene lineare Differentialgleichungen.
Die homogene Gleichung zu (2) ist

$$\dot{u}(t) + 2tu(t) = 0 \Longrightarrow \ln u(t) = -\int 2t\,dt = -t^2 + C\,,$$

also ist $u(t) = e^{-t^2}$ und

$$y(t) = e^{-t^2}\left(\int -4te^{t^2}\,dt\right) = e^{-t^2}(2e^{t^2} + C) = 2 + Ce^{-t^2}\,.$$

Die homogene Gleichung zu (2) ist

$$\dot{u}(t) + \frac{u(t)}{t} = 0 \Longrightarrow \ln u(t) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t\,,$$

also ist $u(t) = C/t$ mit einer beliebigen Konstanten C. Durch partielle Integration finden wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{t}\left(\int -te^{-t}\,dt\right) = -\frac{1}{t}\left(te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right) = -\frac{1}{t}\big(te^{-t} + e^{-t} - C\big) \\ &= -e^{-t} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{C}{t}\,. \end{aligned}$$

Im Falle von (3) ist die homogene Gleichung $\dot{u}(t) = cu(t)$ mit Lösung $u(t) = Ce^{ct}$; damit ist

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{ct}\left(\int (a+bt)e^{-ct}\,dt\right) = e^{ct}\left(-\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{bt}{c}\right)e^{-ct} + C\right) \\ &= Ce^{ct} - \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{bt}{c}\right)\,. \end{aligned}$$

Gleichung (4) müssen wir zunächst durch $(1+t)$ dividieren um die übliche Standardform zu erhalten:

$$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{1+t} = -\frac{t^2 + t^3}{1+t} = -t^2\,.$$

Die homogene Gleichung ist dann

$$\dot{u}(t) + \frac{u(t)}{1+t} = 0 \Longrightarrow u(t) = e^{-\int \frac{dt}{1+t}} = e^{-\ln(1+t) + \widetilde{C}} = \frac{C}{1+t}\,,$$

und $y(t) = -\dfrac{1}{1+t}\left(\int -t^2(1+t)\,dt\right) = -\dfrac{t^3/3+t^4/4}{1+t} + \dfrac{C}{1+t}$.

Bei Gleichung (5) sehen wir die allgemeine Lösung Ce^{-t} der homogenen Gleichung auch ohne Rechnung. Die Lösung der Differentialgleichung selbst ist

$$y(t) = 2e^{-t}\left(\int \sin t \cdot e^t\,dt\right),$$

wobei wir das Integral durch eine zweifache partielle Integration ausrechnen können. (Es ginge natürlich auch über die EULERschen Formeln.)

$$\int \sin t\, e^t\,dt = -\cos t\, e^t + \int \cos t\, e^t\,dt = -\cos t\, e^t + \sin t\, e^t - \int \sin t\, e^t\,dt,$$

also ist

$$2\int \sin t\, e^t\,dt = (\sin t - \cos t)e^t + C \quad \text{und} \quad y(t) = \sin t - \cos t + Ce^{-t}.$$

Beim letzten Beispiel schließlich hat die homogene Gleichung $\dot u(t) + \sin t\, u(t) = 0$ die Lösung $u(t) = Ce^{\cos t}$ und

$$y(t) = e^{-\cos t}\left(\int \sin^3 t\, e^{\cos t}\,dt\right).$$

Setzen wir $x = \cos t$, ist $dx = -\sin t\,dt$, also

$$\begin{aligned}\int \sin^3 t\, e^{\cos t}\,dt = -\int \sin^2 t\, e^x\,dx = -\int (1-x^2)\,e^x\,dx = \int (x^2-1)\,e^x\,dx,\\ = (x^2-1)e^x - \int 2xe^x\,dx = (x^2-1)e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx = (x^2-2x+1)e^x + C\\ = (\cos^2 t - 2\cos t + 1)e^{\cos t} + C.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung $y(t) = \cos^2 t - 2\cos t + 1 + Ce^{-\cos t}$.

f) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned}
\dot y(t) &= \cos y(t) & \text{mit} \quad y(0) &= 0 & (1)\\
2\dot y(t)y(t) &= 1 & \text{mit} \quad y(0) &= 0 & (2)\\
\dot y(t) &= \tfrac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}} & \text{mit} \quad y(0) &= 0 & (3)\\
\dot y(t) &= \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1+t^8} & \text{mit} \quad y(0) &= 1 & (4)\\
\dot y(t)^2 &= 4y(t) & \text{mit} \quad y(0) &= 0 & (5)\\
\dot y(t) &= \frac{1}{y(t)} & \text{mit} \quad y(0) &= 1 & (6)
\end{aligned}$$

Lösung: Die rechte Seite $\cos y(t)$ von (1) hängt nur von y ab, und die Ableitung $-\sin y$ von $\cos y$ nach y ist überall vom Betrag höchstens eins. Damit haben wir eine LIPSCHITZ-Bedingung (mit LIPSCHITZ-Konstante eins), und die Behauptung folgt aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF.

Bei (2) sind $y(t) = \pm\sqrt{t}$ zwei Lösungen – zumindest wenn man für $t = 0$ damit zufrieden ist, daß $\lim_{t\to 0} 2\dot y(t)y(t) = 1$ ist. Eine Lösung mit für $t \to 0$ beschränkter Ableitung kann es natürlich nicht geben, denn für diese wäre $\dot y(0) \cdot y(0) = 0$.

Bei (3) gibt sind sämtliche Funktionen $y(t) = Ct^{5/3}$ Lösungen des Anfangswertproblems.

Bei (4) ist die partielle Ableitung $\dfrac{-\sin t \cdot \sin y}{1+t^8}$ der rechten Seite nach y beschränkt, so daß wir den Satz von PICARD-LINDELÖF anwenden können; das Anfangswertproblem ist also eindeutig lösbar.

Bei (5) dagegen sind $y(t) = t^2$ und $y(t) = 0$ zwei verschiedene Lösungen.

Bei (6) schließlich ist die partielle Ableitung $\dfrac{-1}{y^2}$ beschränkt in der Umgebung eines Punktes t mit $y(t) = 1$, also ist zumindest eine lokal eindeutige Lösung garantiert.

g) Lösen Sie die Differenzengleichung $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ unter der Anfangsbedingung $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$!

Lösung: Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 - 2\lambda - 1$ mit Nullstellen $1 \pm \sqrt{2}$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist somit

$$x_n = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n .$$

Wegen $x_0 = 0$ ist $a + b = 0$, also $b = -a$; die Bedingung $x_1 = 1$ übersetzt sich dann in $2a\sqrt{2} = 1$. Somit ist

$$x_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} 2\cdot\binom{2k+1}{n}\left(\sqrt{2}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{2k+1}{n}2^k .$$

h) Formulieren Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = ty(t)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung und berechnen Sie, ausgehend von $y_0(t) = 1$, mindestens die ersten drei Iterationen zur Bestimmung des Fixpunkts! Erraten Sie auf Grund dieser Näherungslösungen den Fixpunkt und weisen Sie nach, daß Sie richtig geraten haben!

Lösung: Das Anfangswertproblem ist äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$y(t) = 1 + \int_0^t \dot{y}(\tau)\,d\tau = 1 + \int_0^t \tau y(\tau)\,d\tau \underset{\text{def}}{=} T(y)(t) .$$

Ausgehend von $y_0(t) = 1$ erhalten wir

$$y_1(t) = T(y_0)(t) = 1 + \int_0^t t\,d\tau = 1 + \frac{t^2}{2} ,$$

$$y_2(t) = T(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (\tau + \tfrac{1}{2}\tau^3)\,d\tau = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} ,$$

$$y_3(t) = T(y_2)(t) = 1 + \int_0^t (\tau + \tfrac{1}{2}\tau^3 + \tfrac{1}{8}\tau^5)\,d\tau = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} ,$$

$$y_3(t) = T(y_2)(t) = 1 + \int_0^t (\tau + \tfrac{1}{2}\tau^3 + \tfrac{1}{8}\tau^5 + \frac{1}{48}\tau^7)\,d\tau = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} + \frac{t^8}{384} .$$

Spätestens jetzt wird man vermuten, daß die Nenner etwas mit Zweierpotenzen zu tun haben; da

$$2 = 2^1\cdot 1, \quad 8 = 2^2\cdot 2, \quad 48 = 2^3\cdot 6 \quad \text{und} \quad 384 = 2^4\cdot 24$$

ist, sollte der Nenner bei t^{2k} wohl $2^k\cdot k!$ sein, d.h.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{2^k\cdot k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{t^2/2}$$

ist. Diese Funktion hat die Ableitung $\dot{y}(t) = te^{t^2/2} = ty(t)$, erfüllt also in der Tat die Differentialgleichung und natürlich auch die Anfangsbedingungen.