

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. November 2006

a) Bestimmen Sie die sämtlichen reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 40 \sin 3t \quad (1)$$

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = \cos t \quad (2)$$

$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 80 \sin 3t \quad (3)$$

$$y^{(4)}(t) - 16y(t) = 80 - 48t \quad (4)$$

$$y^{(4)}(t) + 8\ddot{y}(t) + 16y(t) = 400 \quad (5)$$

b) Lösen Sie die Differenzengleichung $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$ mit $x_0 = 3$ und $x_1 = 5$!

c) Was ist $x_{1\,000\,000}$?

d) Formen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2t \cdot (y(t) - 2)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung, und berechnen Sie die ersten Iterationen! Erraten Sie anhand dieser die Lösungsfunktion, und bestätigen Sie dies durch Einsetzen!

e) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$$\dot{y}(t) + 2ty(t) = 4t \quad (1) \qquad \dot{y}(t) + \frac{y(t)}{t} + e^t = 0 \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = a + bt + cy(t) \quad (3) \qquad (1+t)\dot{y}(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0 \quad (4)$$

$$\dot{y}(t) + y(t) = 2 \sin t \quad (5) \qquad \dot{y}(t) + \sin t y(t) = \sin^3 t \quad (6)$$

f) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\dot{y}(t) = \cos y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (1)$$

$$2\dot{y}(t)y(t) = 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1+t^8} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad (4)$$

$$\dot{y}(t)^2 = 4y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (5)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad (6)$$

g) Lösen Sie die Differenzengleichung $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ unter der Anfangsbedingung $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$!

h) Formulieren Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = ty(t)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung und berechnen Sie, ausgehend von $y_0(t) = 1$, mindestens die ersten drei Iterationen zur Bestimmung des Fixpunkts! Erraten Sie auf Grund dieser Näherungslösungen den Fixpunkt und weisen Sie nach, daß Sie richtig geraten haben!