Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13. November 2006

a) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} !$$

Lösung: Das charakteristische Polynom berechnet sich, z.B. nach der Sarrusschen Regel, zu

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (-2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 2 - 2 + (2-\lambda)\cdot 2 + 3\cdot(1-\lambda) + (2+\lambda)\cdot 2 \\ &= (\lambda^2 - 4)(1-\lambda) - 6 - 2 + 4 - 2\lambda + 3 - 3\lambda + 4 + 2\lambda \\ &= (-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4) + (3 - 3\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1)\,. \end{aligned}$$

Nach dem Wurzelsatz von Viète ist also das Produkt der drei Nullstellen gleich -1, und ihre Summe $+1$.

Einsetzen zeigt, daß die beiden ganzzahligen Teiler ± 1 des konstanten Koeffizienten Nullstellen sind; da ihr Produkt -1 und ihre Summe null ist, ist die dritte Nullstelle $+1$. Wir haben also die einfache Nullstelle -1 und die doppelte Nullstelle $+1$.

Für $\lambda = -1$ ist

$$A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist die erste Spalte gleich der dritten und die zweite linear unabhängig davon; der Lösungsraum ist somit eindimensional und wird aufgespannt von

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda = +1$ ist

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

jetzt stimmen die ersten beiden Spalten überein, während die dritte linear unabhängig davon ist. Daher ist auch hier der Eigenraum nur eindimensional; er wird aufgespannt von

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da der Eigenwert $+1$ trotz algebraischer Vielfachheit zwei nur geometrische Vielfachheit eins hat, gibt es keine Basis aus Eigenvektoren, aber es gibt einen Hauptvektoren zweiter Stufe zum Eigenwert eins. Zu deren Bestimmung müssen wir

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen; wir sehen sofort, daß diese Matrix alle Vektoren annuliert, deren erste beide Komponenten sich zu Null ergänzen. Hauptvektoren zweiter Stufe sind diejenigen unter diesen Vektoren, die keine Eigenvektoren sind, deren dritte Komponenten also nicht verschwindet. Die einfachste Wahl für einen zweiten Basisvektor des Hauptraums ist daher

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) n sei eine natürliche Zahl. Was ist A^n für die gerade betrachtete Matrix?

Lösung: Bezeichnet

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix mit Spalten $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, so ist $\Delta = B^{-1}AB$ eine obere Dreiecksmatrix, die wir aber glücklicherweise nicht so berechnen müssen: Da $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ Eigenvektoren sind, wissen wir, daß in den ersten beiden Spalten nur die Diagonaleinträge von null verschieden sein können; dort stehen die Eigenwerte -1 und 1.

$\vec{v}_3$ allerdings ist kein Eigenvektor, sondern nur Hauptvektor; wegen der Invarianz der Haupträume liegt $A\vec{v}_3$ zwar wieder im Hauptraum, ist aber kein Vielfaches von $\vec{v}_3$. Nachrechnen zeigt, daß

$$A\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

ist; somit hat die dritte Spalte der Matrix Δ, die die Abbildung $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ beschreibt, zweiten und dritten Eintrag eins, d.h.

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Da D und N miteinander kommutieren, können wir den binomischen Lehrsatz anwenden und erhalten $\Delta^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i} N^i$ mit

$$D^m = \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N^i = 0 \text{ für } i \geq 2 .$$

Somit ist

$$\Delta^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wegen $\Delta = B^{-1}AB$ ist $A = B\Delta B^{-1}$ und daher auch $A^n = B\Delta^n B^{-1}$.

Der für die Matrix B ziemlich einfache GAUSS-Algorithmus zeigt, daß

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, also folgt für gerades n

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & -n & -n \\ n & 1+n & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und für ungerades n

$$A^n = \begin{pmatrix} -1-n & -2-n & -n \\ n & 1+n & n \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Was ist e^{At} ?

Lösung: $e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1}$; dabei ist $e^{\Delta t} = e^{Dt}e^{Nt}$ und $e^{Nt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}N^i t^i = E + Nt$, da wir aus der vorigen Aufgabe wissen, daß alle Potenzen N^i mit $i \geq 2$ verschwinden. Somit ist e^{At} die Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}(E + Nt) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix},$$

d.h. $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} - te^t & e^{-t} - (1+t)e^t & -te^t \\ te^t & (1+t)e^t & te^t \\ e^t - e^{-t} & e^t - e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$.

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 3x(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= \quad x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= \quad 2x(t) + 2y(t) + z(t)\,! \end{aligned}$$

Lösung: Das sind gerade die Funktionenvektoren

$$e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(e^{-t} - te^t) + y_0\big(e^{-t} - (1+t)e^t\big) - z_0te^t \\ x_0te^t + y_0(1+t)e^t + z_0te^t \\ x_0(e^t - e^{-t}) + y_0(e^t - e^{-t}) + z_0e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R},$$

d.h.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(e^{-t} - te^t) + y_0\big(e^{-t} - (1+t)e^t\big) - z_0te^t \\ &= -(x_0 + y_0 + z_0) - y_0e^t + (x_0 + y_0)e^{-t}, \\ y(t) &= x_0te^t + y_0(1+t)e^t + z_0te^t = (x_0 + y_0 + z_0)te^t + y_0e^t \quad \text{und} \\ z(t) &= x_0(e^t - e^{-t}) + y_0(e^t - e^{-t}) + z_0e^t = (x_0 + y_0 + z_0)e^t - (x_0 + y_0)e^{-t}. \end{aligned}$$

e) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = z(0) = 1$ und $y(0) = 0$!

Lösung: Hier ist $x_0 = z_0 = 1$ und $y_0 = 0$, also

$$x(t) = e^{-t} - 2te^t, \qquad y(t) = 2te^t \quad \text{und} \quad z(t) = 2e^t - e^{-t}.$$

f) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(3) = z(3) = 1$ und $y(3) = 0$!

Lösung: Die Funktionen $x(3+t), y(3+t), z(3+t)$ erfüllen das Anfangswertproblem der vorigen Aufgabe, d.h wir müssen die dortigen Lösungsfunktionen an der Stelle $t - 3$ auswerten und erhalten

$$x(t) = e^{3-t} - 2(t-3)e^{t-2}, \qquad y(t) = 2(t-3)e^{t-3} \quad \text{und} \quad z(t) = 2e^{t-3} - e^{3-t}.$$

g) Welche Lösungen des Differentialgleichungssystems bleiben beschränkt für $t \to \infty$?

Lösung: Genau die, bei denen die Koeffizienten vor te^t und vor e^t verschwinden, d.h. $x_0 + y_0 + z_0$ und y_0 müssen verschwinden, was gleichbedeutend ist mit $x_0 = -z_0$ und $y_0 = 0$.

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ habe unter anderem die Eigenwerte ± 1 mit algebraischer Vielfachheit eins, $2 + 3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3 + 5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei; die geometrische Vielfachheit sei jeweils eins.

h) Was ist $\det A$?

Lösung: Da A eine reelle Matrix ist, hat auch das charakteristische Polynom von A reelle Koeffizienten; nichtreelle Nullstellen können also nur als Paare konjugiert komplexer Zahlen auftreten. Damit ist zu jedem Eigenwert λ auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert derselben algebraischen Vielfachheit. Also gibt es außer den angegebenen Eigenwerten auch noch die Eigenwerte $2 - 3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3 - 5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei. Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der damit bekannten Eigenwerte ist $1 + 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$, also kennen wir alle Eigenwerte.
Die Determinante einer Matrix hängt nicht von der Basis ab; da wir die Matrix bezüglich einer geeigneten (komplexen) Basis auf Dreiecksgestalt bringen können mit den Eigenwerten entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit in der Diagonalen, ist somit

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot (-1) \cdot (2+3i)^2 \cdot (2-3i)^2 \cdot (-3+5i)^2 \cdot (-3-5i)^2 \\ &= 1 \cdot (-1)\,|2+3i|^4 \cdot |-3+5i|^6 \\ &= -\left(2^2+3^2\right)^2 \cdot \left(3^2+5^2\right)^3 = -13^2 \cdot 34^3 = -6642376\,.\end{aligned}$$

i) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten einer Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$?

Lösung: Die Eigenwerte ± 1 sorgen dafür, daß es Lösungen gibt, die direkt ins Unendliche *bzw.* zum Nullpunkt gehen. Die Eigenwerte $2 \pm 3i$ führen zu Lösungen, die spiralförmig ins Unendliche gehen und $-3 \pm 5i$ für solche, die sich spiralförmig auf den Nullpunkt zusammenziehen. Dazu kommen noch alle Arten von Lösungen, die zwei oder mehrere dieser Verhaltensweise bezüglich verschiedener Dimensionen kombinieren, also beispielsweise Lösungen, die spiralförmig auf eine Achse zulaufen, entlang dieser aber ins Unendliche (oder zum Nullpunkt) gehen und so weiter. Da es, mit Vielfachheiten gezählt, vier Eigenwerte mit negativem Realteil gibt, liegen alle Lösungen langfristig in der Umgebung eines fünfdimensionalen Teilraums von $\mathbb{R}^{12}$.

j) Welche dieser Möglichkeiten wird am häufigsten zu beobachten sein?

Lösung: Falls nicht gerade alle Koeffizienten der Exponentialfunktionen mit positivem Realteil im Exponenten verschwinden, geht die Lösung ins Unendliche, wobei im Allgemeinen sowohl Achsen existieren, auf denen die entsprechenden Lösungskomponenten direkt nach Unendlich gehen, als auch Ebenen, in denen dies spiralförmig geschieht.

k) Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 0$$

um in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung und bestimmen Sie so ihre Lösung!

Lösung: Wir führen den neuen Namen $z(t)$ für $\dot{y}(t)$ ein und erhalten dann das System

$$\begin{pmatrix} \dot{y}(t) = z(t) \\ \dot{z}(t) = -y(t) - z(t) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat das charakteristische Polynom

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)+1 = \lambda^2+\lambda+1 = \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4};$$

die Eigenwerte sind also

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,.$$

Damit sind alle Lösungsfunktionen Linearkombinationen von $e^{(-1/2\pm i\cdot\sqrt{3}/2)t}$. Die reellen Lösungen lassen sich allerdings übersichtlicher darstellen als die reellen Linearkombinationen von $e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$ und $e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$.

l) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) - \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) = 0$!

Lösung: Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0\,.$$

VIÈTE schlägt die Lösungskandidaten ± 1 vor, von denen offensichtlich nur $\lambda = 1$ wirklich eine Lösung ist. Die beiden anderen erhält man entweder durch Polynomdivision

$$(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 1$$

oder nach VIÈTE: Ihre Summe muß null sein und ihr Produkt eins, also kommen nur i und $-i$ in Frage. Die allgemeine Lösung ist daher

$$y(t) = ae^t + be^{it} + ce^{-it} = ae^t + \beta\cos t + \gamma\sin t$$

mit beliebigen Konstanten $a, b, c, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

m) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 0$!

Lösung: Wer die binomische Formel kennt, sieht sofort, daß die charakteristische Gleichung hier

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda+1)^4 = 0$$

ist; wir haben also die vierfache Nullstelle $\lambda = -1$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(t) = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{-t} \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

n) Bestimmen Sie Basen sowohl für den reellen als auch den komplexen Lösungsraum der Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y^{(3)}(t) + 8\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$!
Hinweis: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$

Lösung: Nach dem Hinweis ist die linke Seite der charakteristischen Gleichung Quadrat des Polynoms

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1\,,$$

die Nullstellen sind also $1 \pm i$ mit, bezüglich der charakteristischen Gleichung, Vielfachheit jeweils zwei. Eine mögliche Basis des komplexen Lösungsraums bilden daher die vier Funktionen

$$e^{(1+i)t}, \quad e^{(1-i)t}, \quad te^{(1+i)t} \quad \text{und} \quad te^{(1-i)t};$$

eine andere, die gleichzeitig Basis des reellen Lösungsraums ist, bilden die Funktionen

$$e^t \cos t, \quad e^t \sin t, \quad te^t \cos t \quad \text{und} \quad te^t \sin t\,.$$