Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13. November 2006

a) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} !$$

b) n sei eine natürliche Zahl. Was ist A^n für die gerade betrachtete Matrix?

c) Was ist e^{At} ?

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 3x(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= 2x(t) + 2y(t) + z(t)\,! \end{aligned}$$

e) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = z(0) = 1$ und $y(0) = 0$!

f) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(3) = z(3) = 1$ und $y(3) = 0$!

g) Welche Lösungen des Differentialgleichungssystems bleiben beschränkt für $t \to \infty$?

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ habe unter anderem die Eigenwerte ± 1 mit algebraischer Vielfachheit eins, $2 + 3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3 + 5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei; die geometrische Vielfachheit sei jeweils eins.

h) Was ist $\det A$?

i) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten einer Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$?

j) Welche dieser Möglichkeiten wird am häufigsten zu beobachten sein?

k) Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 0$$

um in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung und bestimmen Sie so ihre Lösung!

l) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) - \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) = 0$!

m) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 0$!

n) Bestimmen Sie Basen sowohl für den reellen als auch den komplexen Lösungsraum der Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y^{(3)}(t) + 8\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$!
Hinweis: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$