WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, ZIMMER C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6. November 2006

*a)* Zeigen Sie: Zu vorgegebenen reellen Zahlen $a, b$ gibt es genau zwei komplexe Zahlen $x, y$ derart, daß $x + y = a$ und $xy = b$ ist.

*b)* Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 15 = 0$ !

*c)* Lösen Sie die kubische Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ !

*d)* Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ !

*e)* Welche Nullstellen hat $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$ ?

*f)* Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ !

*g)* Gibt es eine Basis von $\mathbb{C}^2$ aus *reellen* Eigenvektoren von $C$ ?

*h)* Was ist $e^C$ *bzw.* $e^{Ct}$ ?

*i)* Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}$ !

*j)* Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ !

*k)* Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die einzelnen Eigenwerte?

*l)* Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 5y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t) + y(t)\,!$$

*m)* Welche Lösung hat das entsprechende Anfangswertproblem mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$ ?

*n)* Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ${}^tAA$ symmetrisch.

*o)* Mit welchen komplexen Zahlen $a, b, c$ wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine HERMITEsche Matrix?

*p)* Welche der folgenden Matrizen $A_n$ sind symmetrisch, welche HERMITEsch? Von welchen wissen Sie, daß $\mathbb{R}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren von $A_n$ hat?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$