

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 30. Oktober 2006

- a) Berechnen Sie für $g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t) dt! \quad \text{Ist} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t) dt?$$

- b) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt! \quad \text{Ist} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt?$$

- c) Berechnen Sie für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:

$$f_1(t) = \sin t, \quad f_2(t) = \sin^2 t, \quad f_3(t) = 5t + 7, \quad f_4(t) = e^t$$

- d) Berechnen Sie die Faltungsprodukte $(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})) * \sin t$ und $(\delta(t) + \delta(t - \pi)) * \sin t!$

- e) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

f) Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

- g) Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und einer Konstanten $\Omega > 0$ eine Funktion g mit der Eigenschaft, daß $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ ist für $|\omega| \leq \Omega$ und $\widehat{g}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$!

- h) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \sum_{k=0}^{2N+1} \delta(t - (\frac{2N+1}{2} - k) d)$!

- i) Sei nun $a < \frac{d}{2}$ eine Konstante und $g(t) = 1$, falls es eine ganze Zahl $0 \leq k \leq 2N + 1$ gibt, so daß $|t - (\frac{2N+1}{2} - k) d| \leq \frac{a}{2}$ ist; ansonsten sei $g(t) = 0$. Berechnen Sie auch die FOURIER-Transformierte von g !

- j) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modul Klausur seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma \cdot (w(t) - \beta)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

- k) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1 \text{ Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

- l) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von 40 m^3 , dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

- m) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?