WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. Oktober 2006

a) Welche der folgenden Funktionen liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

$$f(t) = t, \qquad g(t) = \frac{1}{t}, \qquad h(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad j(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}},$$
$$k(t) = e^{-t}, \qquad \ell(t) = e^{-t^2}, \qquad m(t) = e^{-t}\sin t, \qquad n(t) = e^{-|t|}\cos t$$

Lösung: Das Integral über $|f(t)|^2 = t^2$ divergiert an den Grenzen, das über $|g(t)|^2 = 1/t^2$ an der Stelle $t = 0$. Die Integrale für h und j haben jeweils das Integral über $1/(1+t^2)$ als konvergente Majorante, konvergieren also.

Das Integral über $|k(t)|^2 = e^{-2t}$ divergiert an der unteren Grenze; $\ell(t) = e^{-t^2}$ liegt im SCHWARTZ-Raum, also erst recht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$m(t)$ liegt aus dem gleichen Grund wie $k(t)$ nicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, dafür aber $n(t) = e^{-|t|}\cos t$, denn aus der Vorlesung ist bekannt, daß $e^{-|t|} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und die L^2-Norm von $e^{-|t|}$ ist eine konvergente Majorante für die von $n(t)$.

b) Berechnen Sie die L^2-Normen der folgenden Funktionen:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad g(t) = e^{-t^2}, \qquad h(t) = e^{-(1+t)^2}, \qquad j(t) = \frac{1}{1+|t|}$$
$$k(t) = \frac{1}{1+|[t]|}, \qquad \ell(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}} & \text{falls } n - \frac{1}{2n} < t < n + \frac{1}{2n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \,\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$\|g\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2}\,dt \underset{s=2t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2}\,\frac{ds}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\|h\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(1+t)^2}\,dt \underset{s=t+1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2s^2}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\|j\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+|t|)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{-1}{1+t}\,\Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\|k\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\big(1+|[t]|\big)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|n|)^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2} = -1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 1$$

$$\|\ell\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{2n}}^{n+\frac{1}{2n}} \frac{dt}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

also ist

$$\|f\|_2 = \sqrt{\pi}, \quad \|g\|_2 = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}, \quad \|h\|_2 = \|j\|_2 = 1, \quad \|k\|_2 = \sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 1} \quad \text{und} \quad \|\ell\|_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}\pi\,.$$

c) Welche L^2-Normen haben die FOURIER-Transformierten dieser Funktionen?

Lösung: Allgemein ist nach der PLANCHEREL-Formel $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$; damit lassen sich alle L^2-Normen der FOURIER-Transformierten leicht aus den gerade berechneten L^2-Normen der Funktionen selbst bestimmen.

d) Berechnen Sie die L^2-Norm der Funktion $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$!

Lösung: $\dfrac{\sin\omega}{\omega}$ ist die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses

$$R(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ mit } \|R\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{4} = \frac{1}{2}, \text{ also ist } \|\widehat{f}\|_2 = \|\widehat{R}\|_2 = \sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\,.$$

e) Welche der folgenden Abbildungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ sind Distributionen?

$$T_1(\varphi) = 3\varphi(2) - 2\varphi(3), \qquad T_2(\varphi) = \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, \qquad T_3(\varphi) = 3\ddot{\varphi}(2) - 2\dot{\varphi}(3),$$

$$T_4(\varphi) = e^{\varphi(0)}, \qquad T_5(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt, \qquad T_6(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt,$$

$$T_7(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!}, \qquad T_8(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^n}{n!}, \qquad T_9(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ddot{\varphi}(n)}{n!}$$

Lösung: $T_1 = 3\Delta_2 - 2\Delta_3$ ist eine, T_2 ist nicht linear, T_3 ist linear und stetig (wegen des starken Konvergenzbegriffs in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, der auch Ableitungen einschließt), also Distribution. T_4 ist nicht linear, T_5 und T_6 sind Distributionen wegen der Stetigkeit von Integralen als Funktionen eines Parameters, T_7 und T_9 sind Distributionen, weil die Reihen jeweils Exponentialreihen als absolut konvergente Majoranten haben. (Im SCHWARTZ-Raum ist sowohl φ als auch $\ddot{\varphi}$ beschränkt.) T_8 ist nicht linear.

f) Für $i \le 6$ definieren die obigen Vorschriften auch Abbildungen $T_i\colon L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Für welche davon gibt es Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $T_i = \widetilde{T}_f$?

Lösung: Nicht zu T_1 und T_3, weil diese Abbildungen nicht beschränkt sind; nicht zu T_2 und T_4, weil diese Abbildungen nicht linear sind. Für T_5 ist f einfach ein Rechteckimpuls, der genau auf $[0, 1]$ gleich eins ist, für T_6 bietet sich $f \equiv 1$ an, aber das liegt nicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und in der Tat ist T_6 nicht beschränkt.

g) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Distributionen

$$T_1\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \frac{1}{2}\big(\varphi(1) + \varphi(-1)\big) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_2\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \frac{1}{2}\big(\varphi(i) + \varphi(-i)\big) \end{cases},$$

und schreiben Sie diese, sofern möglich, in der Form T_f mit Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$!

Lösung:

$$\widehat{T}_1(\varphi) = T_1(\widehat{\varphi}) = \frac{1}{2}\big(\widehat{\varphi}(1) + \widehat{\varphi}(-1)\big) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{it}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-it}\,dt\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\cos t\,dt = T_{\cos}(\varphi)\,.$$

und

$$\widehat{T}_2(\varphi) = T_2(\widehat{\varphi}) = \frac{1}{2}\big(\widehat{\varphi}(i) + \widehat{\varphi}(-i)\big) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{t}\,dt\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\cosh t\,dt = T_{\cosh}(\varphi)\,.$$

Allerdings liegen weder $\cos t$ und $\cosh t$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

h) $f(t) \equiv a$ mit $a \in \mathbb{C}$ sei eine konstante Funktion. Was ist $\widehat{T}_f$? Existiert $\widehat{f}(\omega)$?

Lösung: $\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} a\widehat{\varphi}(\omega)\,d\omega = a\check{\widehat{\varphi}}(1) = a\varphi(1)\,.$

Damit ist $\widehat{T}_f = a\Delta_0$ ein Vielfaches der Dirac-Distribution und $\widehat{f}(\omega) = a\delta(\omega)$.

i) Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom $f(t) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}$. Was ist die Fourier-Transformation von f im Distributionensinn? Können Sie diese durch Dirac-Distributionen ausdrücken?

Lösung:

$$\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t)e^{k\cdot i\omega t}\,dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot 2\pi\,\check{\widehat{\varphi}}(k\omega) = 2\pi \sum_{k=-N}^{N} c_k\varphi(k\omega)$$
$$= 2\pi \sum_{k=-N}^{N} c_k\Delta_{k\omega}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi \sum_{k=-N}^{N} c_k\delta(t - k\omega)\right)\varphi(t)\,dt$$

j) *ditto* für $f(t) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{N} \sin \ell\omega t$

Lösung:

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \big(\cos k\omega t + \sin k\omega t\big) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} + \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i}\right)$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1-i}{2}e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1+i}{2}e^{-ik\omega t}\,.$$

Damit ist alles zurückgeführt auf die vorige Frage.

k) *ditto* für $f(t) = t$

Lösung:

$$\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} t\widehat{\varphi}(t)\,dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\dot{\varphi}}(t)\,dt = -2\pi i\check{\widehat{\dot{\varphi}}}(0) = -2\pi i\dot{\varphi}(0)$$

$$= 2\pi i\dot{\Delta}_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i\dot{\delta}(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

l) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Ableitung im Distributionensinn! Läßt sie sich durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

Lösung:

$$\dot{T}_f(\varphi) = -T_f(\dot{\varphi}) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t)\,dt = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1} \dot{\varphi}(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(\varphi(2n) - \varphi(2n+1)\big) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\varphi(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\Delta_m(\varphi)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\delta(t-m)\right)\varphi(t)\,dt$$

m) ditto für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung:

$$\dot{T}_f(\varphi) = -T_f(\dot{\varphi}) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t)\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\varphi}(t)\,dt = \varphi(-\pi) - \varphi(\pi)$$

$$= \Delta_{-\pi}(\varphi) - \Delta_{\pi}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\big(\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)\big)\varphi(t)\,dt$$