

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. Oktober 2006

a) Welche der folgenden Funktionen liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

$$\begin{aligned} f(t) = t, & \quad g(t) = \frac{1}{t}, & \quad h(t) = \frac{1}{1+t^2}, & \quad j(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \\ k(t) = e^{-t}, & \quad \ell(t) = e^{-t^2}, & \quad m(t) = e^{-t} \sin t, & \quad n(t) = e^{-|t|} \cos t \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die L^2 -Normen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & g(t) &= e^{-t^2}, & h(t) &= e^{-(1+t)^2}, & j(t) &= \frac{1}{1+|t|} \\ k(t) &= \frac{1}{1+|[t]|}, & \ell(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}} & \text{falls } n - \frac{1}{2n} < t < n + \frac{1}{2n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

c) Welche L^2 -Normen haben die FOURIER-Transformierten dieser Funktionen?

d) Berechnen Sie die L^2 -Norm der Funktion $f(t) = \frac{\sin t}{t}$!

e) Welche der folgenden Abbildungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ sind Distributionen?

$$\begin{aligned} T_1(\varphi) &= 3\varphi(2) - 2\varphi(3), & T_2(\varphi) &= \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, & T_3(\varphi) &= 3\ddot{\varphi}(2) - 2\dot{\varphi}(3), \\ T_4(\varphi) &= e^{\varphi(0)}, & T_5(\varphi) &= \int_0^1 \varphi(t) dt, & T_6(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt, \\ T_7(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!}, & T_8(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^n}{n!}, & T_9(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ddot{\varphi}(n)}{n!} \end{aligned}$$

f) Für $i \leq 6$ definieren die obigen Vorschriften auch Abbildungen $T_i: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$. Für welche davon gibt es Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $T_i = \tilde{T}_f$?

g) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Distributionen

$$T_1: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(1) + \varphi(-1)) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_2: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(i) + \varphi(-i)) \end{cases},$$

und schreiben Sie diese, sofern möglich, in der Form T_f mit Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$!

h) $f(t) \equiv a$ mit $a \in \mathbb{C}$ sei eine konstante Funktion. Was ist \hat{T}_f ? Existiert $\hat{f}(\omega)$?

i) Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom $f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}$. Was ist die FOURIER-Transformation von f im Distributionensinn? Können Sie diese durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

j) *ditto* für $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^N \cos k \omega t + \sum_{\ell=1}^N \sin \ell \omega t$

k) *ditto* für $f(t) = t$

l) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Ableitung im Distributionensinn! Lässt sie sich durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

m) *ditto* für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$