Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. Oktober 2006

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = \sin a, \quad \dot{x}(0) = \cos a$$

via Laplace-Transformation und beweisen Sie so die Additionsformel für $\sin(t + a)$!

Lösung: Für $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ ist $s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + X(s) = 0$, also

$$X(s) = \frac{s\sin a + \cos a}{s^2+1} = \sin a \cdot \frac{s}{s^2+1} + \cos a \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\sin a \cos t + \cos a \sin t\}(s)\,.$$

Da $\sin(a + t)$ das Anfangswertproblem offensichtlich löst, folgt (modulo der noch nicht gezeigten Umkehrbarkeit der Laplace-Transformation) $\sin(a+t) = \sin a \cos t + \cos a \sin t$.

b) Wie kann man auf ähnliche Weise die Additionsformel für den Kosinus herleiten?

Lösung: $\cos(a + t)$ löst das Anfangswertproblem $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ mit $x(0) = \cos a$ und $\dot{x}(0) = -\sin a$. Hier folgt entsprechend

$$X(s) = \frac{s\cos a - \sin a}{s^2+1} = \cos a \cdot \frac{s}{s^2+1} - \sin a \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\cos t \cos a - \sin t \sin a\}\,.$$

Somit ist $\cos(t + a) = \cos t \cos a - \sin t \sin a$.

c) Laut Vorlesung ist $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Beziehung jene Stammfunktion $F(t)$ von $f(t) = t^n$, für die $F(0) = a$ ist!

Lösung: $F(t)$ erfüllt die Gleichung $\dot{F}(t) = f(t)$ und $F(0) = a$; daher ist

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = s\mathcal{L}\{F(t)\}(s) - a \quad \text{und}$$
$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^n\}(s) + \frac{a}{s} = \frac{n!}{s^{n+2}} + \frac{a}{s} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{s^{n+2}} + \frac{a}{s} = \frac{1}{n+1}\mathcal{L}\{t^{n+1}\}(s) + \mathcal{L}\{a\}(s)\,.$$

Also ist $F(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + a$, was man natürlich auch einfacher ohne Laplace-Transformation bekommen hätte.

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$ und $y(0) = c$ mit Hilfe von Laplace-Transformationen!

Lösung: $\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - c = \lambda\mathcal{L}\{y(t)\}$, also ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{c}{s-\lambda} = c\mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \mathcal{L}\{ce^{\lambda t}\}(s) \Longrightarrow y(t) = ce^{\lambda t}\,.$$

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - 16y(t) = 0$ mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$, $\ddot{y}(0) = 3$ und $y^{(3)}(0) = 0$ mit Hilfe einer Tabelle von Laplace-Transformationen!

Lösung: $\mathcal{L}\{y^{(4)}(t)\}(s) = s^4\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^3 - 2s^2 - 3s = 16\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, also ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s}{s^4 - 16}\,.$$

In der Tabelle auf der Rückseite des Übungsblatts stehen LAPLACE-Transformationen mit Nenner $s^4 - \omega^4$ und Zähler s, s^2, s^3; mit $\omega = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}(\cosh 2t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(\sinh 2t + \sin 2t) + \frac{3}{8}(\cosh 2t - \cos 2t) \\ &= \frac{7}{8}\cosh 2t + \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{2}\sinh 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\,. \end{aligned}$$

f) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ und $\ddot{y}(0) = 0$!

Lösung: $\mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\}(s) = s^3\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \Longrightarrow \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0 \Longrightarrow y(t) \equiv 0\,.$

g) Bestimmen Sie *alle* Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 4y(t) = 6\cos t$!

Lösung: Da wir bislang nur wissen, wie man Anfangswertprobleme löst, lösen wir das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = 6\cos t \quad \text{mit} \quad y(0) = u \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = v$$

mit *beliebigen* Werten $u, v \in \mathbb{R}$: Irgendeinen Wert muß $y(0)$ *bzw.* $\dot{y}(0)$ schließlich für jede Funktion $y(t)$ haben.
Für $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ ist dann

$$s^2Y(s) - us - v + 4Y(s) = \frac{6s}{s^2+1}\,,$$

also

$$Y(s) = \frac{us+v}{s^2+4} + \frac{6s}{(s^2+1)(s^2+4)}\,.$$

Wir setzen

$$\frac{6s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4} = \frac{(a+c)s^3 + (b+d)s^2 + (4a+c)s + 4b + d}{(s^2+1)(s^2+4)}\,.$$

Also ist

$$a + c = 0, \quad 4b + d = 0 \quad \text{und} \quad 4a + c = 6\,,$$

d.h. $3a = 6$ oder $a = -c = 2$ und $b = d = 0$. Somit ist

$$\frac{6s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4} = \mathcal{L}\{2\cos t - 2\cos 2t\}(s)\,.$$

Außerdem ist

$$\frac{us+v}{s^2+4} = \mathcal{L}\{u\cos 2t + \tfrac{v}{2}\sin 2t\}(s)\,,$$

wobei $u, v \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden können. Damit läßt sich jede Lösung in der Form

$$y(t) = 2\cos t + a\sin 2t + b\cos 2t$$

schreiben mit $a, b \in \mathbb{R}$. (Wie a, b von den Anfangswerten u, v abhängen, interessiert uns in diesem Zusammenhang nicht – auch wenn es hier trivial ist: $a = \frac{v}{2}$ und $b = u - 2$.)

h) Finden Sie eine Funktion $f(t)$ mit $L\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$!

Lösung: Wir konstruieren eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{as+b}{s^2} + \frac{cs+d}{s^2+1} = \frac{(a+c)s^3 + (b+d)s^2 + cs + d}{s^2(s^2+1)}\,;$$

dazu müssen wir also das lineare Gleichungssystem

$$a + c = 0, \quad b + d = 0, \quad a = 0 \quad \text{und} \quad b = 1$$

„lösen". Offensichtlich ist $a = c = 0$ und $b = -d = 1$. Somit ist

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{t\}(s) - \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \mathcal{L}\{t - \sin t\}(s) .$$

i) Finden Sie eine Funktion $f(t)$ mit $L\{f(t)\}(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s^2+1)}$!

Lösung: Wir machen zur Partialbruchzerlegung denselben Ansatz wie in der vorigen Aufgabe; dieses Mal wird das LGS zu

$$a + c = 0, \quad b + d = 0, \quad a = 1 \quad \text{und} \quad b = 1 .$$

Jetzt sind also $a = b = 1$ und $c = d = -1$, d.h.

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2(s^2+1)} &= \frac{s+1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \\ &= \mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{t\}(s) - \mathcal{L}\{\cos t\}(s) - \mathcal{L}\{\sin t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{t + 1 - \cos t - \sin t\}(s) .\end{aligned}$$

j) Leiten Sie die LAPLACE-Transformierte $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ von $\cos \omega t$ ab nach s und benutzen Sie das Ergebnis zur Konstruktion einer Funktion $f(t)$ mit $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$!

Lösung: Nach der Quotientenregel ist die Ableitung gleich

$$\frac{s^2+\omega^2-2s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{\omega^2-s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} - \frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2} .$$

Der zweite Summand macht Probleme; daher schreiben versuchen wir, einen Summanden mit Zähler $s^2 + \omega^2$ zu bekommen, bei dem wir kürzen können:

$$\frac{\omega^2-s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{2\omega^2-(s^2+\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{2\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2} .$$

Das Ganze ist die LAPLACE-Transformation von $-t\cos\omega t$, und der letzte Summand ist die von $\frac{1}{\omega}\sin\omega t$, also ist

$$\mathcal{L}\{-t\cos\omega t\}(s) = \frac{2\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} - \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s)$$

oder

$$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{2\omega^2}\mathcal{L}\{-t\cos\omega t\}(s) + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin\omega t}{2\omega^3} - \frac{t\cos\omega t}{2\omega^2}\right\}(s) .$$

k) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ ist stark abfallend.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise bleibt $t^3 f(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$ nicht beschränkt für $t \to \pm\infty$.

l) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{\cosh t}$ ist stark abfallend.

Lösung: *Richtig:* Zunächst hat jede Ableitung von f die Form

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(\sinh t, \cosh t)}{\cosh^{n+1} t},$$

wobei $P_n(x, y)$ ein Polynom vom Gesamtgrad höchstens n ist: Für $n = 0$ ist das klar mit $P_0(x, y) \equiv 1$, und $f^{(n+1)}(t)$ ist die Ableitung von $f^{(n)}(t)$, also ist nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{\cosh^{n+1} t \cdot \frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) - P_n(\sinh t, \cosh t) \cdot (n+1) \cosh^n t \sinh t}{\cosh^{2n+2} t} \\ &= \frac{\cosh t \cdot \frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) - P_n(\sinh t, \cosh t) \cdot (n+1) \sinh t}{\cosh^{n+2} t}. \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) = \frac{\partial}{\partial x} P_n(\sinh t, \cosh t) \cosh t + \frac{\partial}{\partial y} P_n(\sinh t, \cosh t) \sinh t$$

hat die Ableitung von $P_n(\sinh t, \cosh t)$ höchstens denselben Grad wie das Polynom selbst, also hat der Zähler höchstens Grad $n + 1$, womit die Behauptung induktiv folgt. Insbesondere ist spätestens jetzt klar, daß $f(t)$ beliebig oft differenzierbar ist.

Wir schreiben den Nenner um als

$$\cosh^{n+1} t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^{n+1} = e^{(n+1)t} \cdot \frac{(1 + e^{-2t})^{n+1}}{2^{n+1}} = e^{(n+1)t} g(t),$$

wobei $g(t) = (1 + e^{-2t})^{n+1}/2^{n+1}$ für $t \to \infty$ durch positive Schranken nach oben und nach unten beschränkt bleibt. Genauso können wir ihn auch umschreiben als

$$\cosh^{n+1} t = e^{-(n+1)t} \cdot \frac{(1 + e^{2t})^{n+1}}{2^{n+1}} = e^{-(n+1)t} \widetilde{g}(t),$$

wobei $\widetilde{g}(t)$ für $t \to -\infty$ durch positive Schranken nach oben und nach unten beschränkt bleibt. Den Zähler können wir entsprechend schreiben als

$$P_n(\sinh t, \cosh t) = e^{-nt} h(t) = e^{nt} \widetilde{h}(t),$$

wobei $h(t)$ für $t \to \infty$ und $\widetilde{h}(t)$ für $t \to -\infty$ betragsmäßig beschränkt bleibt. Insgesamt ist also

$$f^{(n)}(t) = e^{-t} m(t) = e^t \widetilde{m}(t),$$

wobei $m(t)$ für $t \to \infty$ und $\widetilde{m}(t)$ für $t \to -\infty$ betragsmäßig beschränkt bleibt. Damit ist klar, daß auch für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ der Betrag von $t^r f^{(n)}(t)$ für $t \to \pm\infty$ beschränkt bleibt.

m) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$ ist stark abfallend.

Lösung: *Falsch,* denn sie ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

n) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = te^{-t}$ ist stark abfallend.

Lösung: *Falsch,* denn sie ist für $t \to -\infty$ nicht beschränkt.

o) *Richtig oder falsch:* Die Summe zweier stark abfallender Funktionen ist wieder stark abfallend.

Lösung: *Richtig:* Sie ist wieder beliebig oft differenzierbar, und

$$\left|t^r (f+g)^{(k)}(t)\right| = \left|t^r f^{(k)}(t) + t^r g^{(k)}(t)\right| \le \left|t^r f^{(k)}(t)\right| + \left|t^r g^{(k)}(t)\right|$$

ist beschränkt für alle $k, r \in \mathbb{N}_0$.

p) Richtig oder falsch: Ist f stark abfallend, so auch jede Potenz f^n mit $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: *Richtig:* Mit der Differenzierbarkeit gibt es keine Probleme, und jede Ableitung von $f^n(t)$ kann (via Kettenregel oder Produktregel) abgeschätzt werden durch Produkte von Ableitungen von $f(t)$.

q) Welche periodischen Funktionen sind stark abfallend?

Lösung: *Nur die Nullfunktion.* Falls die Funktion nämlich irgendwo einen von null verschiedenen Wert annimmt, ist $tf(t)$ für $t \to \pm\infty$ nicht mehr beschränkt: Ist etwa $f(t_0) = a \neq 0$ und T die Periode, so ist $tf(t)$ an den Stellen $t = t_0 + kT$ gleich $a(t_0 + k)$, was für $k \to \pm\infty$ nicht beschränkt bleibt.

r) Richtig oder falsch: Wenn die FOURIER-Transformierte von $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert, ist f stark abfallend.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise existiert die FOURIER-Transformierte eines Rechtecksimpulses, der als nicht differenzierbare Funktion aber nicht stark abfallend ist.