

### Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 2. Oktober 2006

- a) Werten Sie die FOURIER-Reihe  $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$  aus an der Stelle  $t = \frac{T}{4}$  und berechnen Sie den numerischen Wert der entstehenden Summe!
- b) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion  $f$  mit FOURIER-Reihe  $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell t}{\sqrt{\ell}}$  ?
- c) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion  $f$  mit FOURIER-Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{\sqrt{2k+1}}$  ?
- d) Zeigen Sie, daß die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2}$  konvergiert, und finden Sie eine obere Schranke für ihren Grenzwert! (*Hinweis:* Die Reihe  $S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} e^{ikt}$  ist aus dem Skriptum bekannt als FOURIER-Reihe einer Funktion mit Periode  $2\pi$ , die zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  gleich dem Sinus hyperbolicus ist.)
- e) Finden Sie obere Schranken für  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  !
- f) Die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien periodisch mit Periode eins, und für  $0 \leq t < 1$  sei  $f(t) = t$  und  $g(t) = t^2$ . Was ist  $f * g$  ?
- g) Die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien periodisch mit Periode eins, und für  $-\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}$  sei  $f(t) = t$  und  $g(t) = t^2$ . Was ist  $f * g$  ?
- h)  $s(t)$  sei der Sägezahn aus der Vorlesung, d.h. die FOURIER-Reihe von  $s$  ist  $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$ . Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von  $s * s$  !
- i) Geben Sie  $s * s$  explizit als Funktion an, indem Sie die Formel 
$$s * f(t) = F(t) + \frac{t}{T} (F(0) - F(T)) - \frac{F(0) + F(T)}{2} + F(T) - \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau) d\tau$$
 aus der Vorlesung anwenden! ( $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .)
- j) Zeigen Sie:  $\left( \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell \omega t \right) * \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} p_{\ell} \sin \ell \omega t \right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k p_k \cos k \omega t$  !
- k) Was ist  $\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \omega t \right) * \left( \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k \omega t \right)$  ?
- l) *Richtig oder falsch:* Für zwei Funktionen  $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist  $f * (g + h) = f * g + f * h$ .
- m) *Richtig oder falsch:* Für eine Funktion  $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist  $f * \frac{1}{T} = 1$ .
- n) *Richtig oder falsch:* Die FOURIER-Reihe von  $f(t) = |t|$  für  $|t| < \pi$  und  $f(\pi) = 0$ , periodisch fortgesetzt mit Periode  $2\pi$ , zeigt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen.
- o) *Richtig oder falsch:* Die FOURIER-Reihe von  $f(t) = |t|$  für  $0 \leq t < 2\pi$ , periodisch fortgesetzt mit Periode  $2\pi$ , zeigt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen.
- p)  $f$  sei periodisch mit Periode  $2\pi$ , und für  $-\pi \leq t < \pi$  sei  $f(t) = t$ . Wohin konvergiert die FOURIER-Reihe von  $f$  für  $t = \pi$  ?
- q) Die Kippschwingung  $f(t)$  sei periodisch mit Periode 10, und für  $0 \leq t < 10$  sei  $f(t) = e^{-t}$ . Wohin konvergiert die FOURIER-Reihe von  $f$  für  $t = 0$  ?
- r) *Richtig oder falsch:* Die Funktion  $f(t) = |\sin t|$  ist linear unabhängig von den Funktionen  $1, \cos kt, \sin \ell t$  mit  $k, \ell \in \mathbb{N}$ .