Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 21. September 2006

a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = i(1-i)$, $z_2 = (3+i)(3-i)$, $z_3 = (i+1)(i-1)$, $z_4 = i^{2005}$, $z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}$, $z_6 = \frac{4+i}{2-i}$

b) Berechnen Sie für $z = \sqrt{3}+i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2004} sowie den Betrag!

c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!

d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = 1$!

e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$!

f) Bestimmen Sie für $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

g) Schreiben Sie die Funktion $\sin 2x \cdot \sin 3y$ als Summe von reinen Sinus- und Cosinustermen!

h) Zeigen Sie: e^z verschwindet für keine komplexe Zahl z.

i) Zeigen Sie: $e^z = 1$ genau dann, wenn z ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist.

j) Betrachten Sie $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ und $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ für beliebige komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$. Wo haben diese Funktionen ihre Nullstellen?

k) Welche der Funktionen $f(z) = 2\cosh z$, $g(z) = e^z + e^{\overline{z}}$ und $h(z) = z^2 \sin z$ ist komplex differenzierbar?

l) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z-3}, \qquad I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}, \qquad I_5 = \int_\gamma e^{\cos z}\, dz$$

m) Welche dieser Integrale ändern Ihren Wert, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta\colon \begin{cases} [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ betrachtet?

n) Die komplexe Zahl z sei in Polarkoordinaten dargestellt als $z = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \le \varphi$. Was ist $\operatorname{Ln} z$?

o) Was ist $\operatorname{Ln} i$?

p) Welchen Hauptteil hat die Funktion $\dfrac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$?

q) Was sind $\operatorname{Res}_{-1} \dfrac{z+2}{(z+1)^2}$, $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^2}$ und $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^5}$

r) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{13}}\, dz$?

s) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx$!

t) *(Aus der letztjährigen Modulklausur)* Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\, dx$!