

Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 2006/2007

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehungsweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich sicherlich nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Tutor. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Berichtigungen und Verbesserungen ausgeben.

KAPITEL III: HARMONISCHE ANALYSE UND INTEGRALTRANSFORMATIONEN.....	1
§1: Funktionen einer komplexen Veränderlichen	3
a) Wozu komplexe Zahlen	3
b) Die Ableitung einer komplexen Funktion	8
c) Integration im Komplexen	11
d) Der Residuensatz	13
e) Berechnung der Residuen	19
f) Anwendung auf reelle Integrale	20
§2: Reelle und komplexe FOURIER-Reihen	27
a) Die schwingende Saite	27
b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite	30
c) Orthogonalitätsrelationen	34
d) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome	40
e) Harmonische Analyse periodischer Funktionen	43
§3: Erste Beispiele von FOURIER-Reihen	44
a) Rechenregeln	44
b) Periodische Rechteckimpulse	46
c) Sägezahnimpulse	49
d) Der Sinus hyperbolicus	51
e) Konvergenz der berechneten Reihen	56
f) Das GIBBS-Phänomen	63
g) Die BESSELSche Ungleichung	69
h) Harmonische Analyse als lineare Abbildung	72

§4: Periodische Faltungen	74
a) Faltungen	74
b) Die FOURIER-Reihe einer Faltung	76
c) Faltung mit einem Sägezahn	79
d) FOURIER-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen	81
e) Der Eindeutigkeitssatz	82
f) Der Satz von PARSEVAL	92
g) HILBERT-Räume	96
h) Die POISSON-Formel	100
§5: FOURIER- und LAPLACE-Transformationen	102
a) FOURIER-Reihen und FOURIER-Integrale	103
b) Die LAPLACE-Transformation	106
c) Erste Beispiele	107
d) Erste Rechenregeln	115
§6: Ableitungen und Differentialgleichungen	119
a) Ableitungen unter dem Integralzeichen	119
b) Transformationen und Ableitungen	122
c) Ungedämpfte Schwingungen	126
d) Gedämpfte Schwingungen	127
e) Erzwungene Schwingungen	135
§7: Die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum	144
a) Der SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen	144
b) Die FOURIER-Transformierte der GAUSS-Funktion	147
c) Die Umkehrung der Fourier-Transformation	151

§8: Die FOURIER-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	156
a) Quadratintegrierbare Funktionen	156
b) Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum	158
c) Die FOURIER-Transformierte einer Distribution	166
d) Der Satz von RIESZ	170
e) Die PLANCHEREL-Formel	179
f) Ableitungen von Distributionen	190
g) Faltungen	194
h) Der Abtastsatz von NYQUIST	199
§9: Ausblick: Mehrdimensionale FOURIER-Theorie	203
a) Faltungen und FOURIER-Integrale	203
b) FRAUNHOFER-Beugung	206
KAPITEL IV: DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	217
§1: Definitionen und erste Beispiele	217
a) Wurfpfaden	217
b) Radioaktiver Zerfall	219
c) Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme ...	220
d) Systeme linearer Differentialgleichungen	222
e) Die Matrixexponentialfunktion	226
f) Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion	228

§2: Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren	234
a) Mehr über Eigenwerte und Eigenvektoren	235
b) Ein erstes Beispiel	238
c) Das charakteristische Polynom und seine Nullstellen	241
d) Vielfachheiten von Eigenwerten	248
e) Eigenwerte symmetrischer und Hermitescher Matrizen	254
f) Hauptvektoren und die JORDAN-Zerlegung	260
g) Ein Beispiel	272
h) Ergänzung: Die JORDAN-Normalform	275
§3: Lineare Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme	282
a) Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	282
b) Langzeitverhalten der Lösung	283
c) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	289
d) Inhomogene Differentialgleichungen	297
e) Symmetriebetrachtungen	300
f) Lineare homogene Differenzgleichungen	311
§4: Nichtlineare Differentialgleichungen	314
a) Eindeutigkeitsfragen	315
b) Der Satz von PICARD und LINDELÖF	318
c) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme	328
d) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen	329
e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren ...	337

f) Qualitative Theorie	346
g) Stabilitätsfragen	356

KAPITEL V: OPTIMIERUNG, FEHLERRECHNUNG UND STATISTIK 371

§1: Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher	371
a) Der eindimensionale Fall	371
b) Verallgemeinerung aufs Mehrdimensionale	372
§2: Maxima und Minima unter Nebenbedingungen	376
§3: Numerische Verfahren	389
a) Die Gradientenmethode	390
b) Der METROPOLIS-Algorithmus	395
c) Zusammenfassung	400
§4: Grundzüge der Fehler- und Ausgleichsrechnung	400
a) Das LAPLACESche Fehlermodell	401
b) Statistische Kenngrößen	404
c) Das Fehlerfortpflanzungsgesetz	408
d) Die Standardabweichung des Mittelwerts und die Schätzung der Varianz	411
§5: Zufallsvariablen und ihre Verteilungen	412
a) Zufallsvariablen	412
b) Statistische Kenngrößen von Zufallsvariablen	414

§6: Erste Beispiele von Verteilungen	415
a) Die Gleichverteilung	415
b) Die Binomialverteilung	416
c) Die POISSON-Verteilung	421
§7: Die Normalverteilung	424
a) Die Normalverteilung als Grenzfall der Binomialverteilung ...	424
b) Die EULERSche Summenformel	426
c) Die STIRLINGSche Formel und die Normalverteilung	429
d) Der zentrale Grenzwertsatz	432
e) Eigenschaften der Normalverteilung	436
f) Die Maximum Likelihood Methode	440
§8: Kompression von Bild- und Audiodaten	443
a) Datenkompression	443
b) Korrelation von Zufallsvariablen	446
c) Das Datenmodell	450
d) Komprimierung durch Dekorrelation	454
e) Die diskrete Cosinus-Transformation	458