WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

4. Dezember 2006

12. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Falls f in einem Punkt $\mathbf{x}$ des Würfels $-1 \le x_i \le 1$ für $i = 1, \dots, n$ ein Maximum annimmt, ist dort $\operatorname{grad} f = \vec{0}$.

2) Richtig oder falsch: f sei auf $D = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| < 2 \right\}$ definiert und ∇f sei dort nirgends gleich dem Nullvektor. Dann nimmt f sowohl sein Maximum als auch sein Minimum in $M = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| \le 1 \right\}$ auf der Einheitssphäre $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| = 1 \right\}$ an.

3) Richtig oder falsch: Falls die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nirgends ein Maximum hat, ist sie unbeschränkt.

4) Konstruieren Sie eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die keine der beiden partiellen Ableitungen überall verschwindet, aber $\nabla f(0,0) = \vec{0}$ ist, ohne daß der Nullpunkt Maximum, Minimum oder Sattelpunkt wäre!

5) Richtig oder falsch: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Zu einer positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine positiv definite Matrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ derart, daß $W^2 = A$ ist.
Hinweis: Was wissen Sie über die Eigenvektoren symmetrischer Matrizen?

b) Berechnen Sie diese Matrix W für $A = \begin{pmatrix} 73 & 36 \\ 36 & 52 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

Bestimmen Sie alle (lokalen) Maxima und Minima sowie die Sattelpunkte der Funktionen

a) $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$

b) $g(x,y) = \cos xy + (x+y)^2$

in $\mathbb{R}^2$!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 10 Euro, 5 Euro *bzw.* 20 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $40\sqrt{x}\,\sqrt[4]{y}\,\sqrt[4]{z}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 50 000 Euro maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 50 000 Euro zu erhöhen?

Keine Abgabe – Abgegeben wird diese Woche nur die Klausur!