Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

27. November 2006

11. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Bei der exakten Differentialgleichung $a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t) = 0$ sei $a(y,t)$ überall von null verschieden. Dann geht durch jeden Punkt (t_0, y_0) höchstens eine Lösungskurve.

2) Richtig oder falsch: Die Gleichgewichtspunkte eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems bilden eine Vektorraum.

3) Welche Fixpunkte hat das System $\dot{x}(t) = 2x(t) - 5y(t)$ und $\dot{y}(t) = 10y(t) - 4x(t)$?

4) Ist der Nullpunkt ein stabiler Fixpunkt von $\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$?

5) Richtig oder falsch: Jedes autonome Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{y}}(t) = F\big(\vec{y}(t)\big)$ hat mindestens einen Fixpunkt.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

a) $t\big(y(t)^2 + 1\big) + (t^2 + 1)\dot{y}(t) = 0$

b) $(1 - t)y(t)\dot{y}(t) = 1 - y(t)^2$

c) $\dot{y}(t) = e^{y(t)} \sin t$

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Finden Sie Differentialgleichungen, deren Lösungskurven durch folgende Gleichungen gegeben sind und geben Sie jeweils an, für welche Anfangsbedingungen $y(t_0) = c_0$ die gefundene Differentialgleichung eine eindeutige Lösung hat!

a) $3y^4 - 4t^3 = C$ *b)* $y \cos t + t \sin y = C$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts $(0,0)$ des Raubtier-Beutetier-Systems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)\,!$$

b) Linearisieren Sie die Raubtier-Beutetier-Gleichung in der Umgebung des anderen Fixpunkts und lösen Sie das linearisierte System. Welche Form haben die Lösungskurven?

c) Das Raubtier-Beutetier-System kann auch benutzt werden zur Beschreibung eines Systems aus einem Nützling (Raubtier) und einem Schädling (Beutetier). Wie verschiebt sich das Gleichgewicht, wenn man durch ein Schädlingsbekämpfungsmittel die Wachstumsrate α der Schädlinge auf ein Zehntel senkt und (wegen der Nebenwirkungen) γ um 10% erhöht?

Abgabe bis zum Montag, dem 4. Dezember 2006, um 15.30 Uhr