

27. November 2006

## 11. Übungsblatt Höhere Mathematik II

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Bei der exakten Differentialgleichung  $a(y, t)\dot{y}(t) + b(y, t) = 0$  sei  $a(y, t)$  überall von null verschieden. Dann geht durch jeden Punkt  $(t_0, y_0)$  höchstens eine Lösungskurve.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Gleichgewichtspunkte eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems bilden einen Vektorraum.
- 3) Welche Fixpunkte hat das System  $\dot{x}(t) = 2x(t) - 5y(t)$  und  $\dot{y}(t) = 10y(t) - 4x(t)$ ?
- 4) Ist der Nullpunkt ein stabiler Fixpunkt von  $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ?
- 5) *Richtig oder falsch:* Jedes autonome Differentialgleichungssystem  $\dot{\vec{y}}(t) = F(\vec{y}(t))$  hat mindestens einen Fixpunkt.

**Aufgabe 1:** (6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

- a)  $t(y(t)^2 + 1) + (t^2 + 1)\dot{y}(t) = 0$
- b)  $(1 - t)y(t)\dot{y}(t) = 1 - y(t)^2$
- c)  $\dot{y}(t) = e^{y(t)} \sin t$

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)

Finden Sie Differentialgleichungen, deren Lösungskurven durch folgende Gleichungen gegeben sind und geben Sie jeweils an, für welche Anfangsbedingungen  $y(t_0) = c_0$  die gefundene Differentialgleichung eine eindeutige Lösung hat!

- a)  $3y^4 - 4t^3 = C$       b)  $y \cos t + t \sin y = C$

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

- a) Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts  $(0, 0)$  des Raubtier-Beutetier-Systems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)!$$

- b) Linearisieren Sie die Raubtier-Beutetier-Gleichung in der Umgebung des anderen Fixpunkts und lösen Sie das linearisierte System. Welche Form haben die Lösungskurven?
- c) Das Raubtier-Beutetier-System kann auch benutzt werden zur Beschreibung eines Systems aus einem Nützling (Raubtier) und einem Schädling (Beutetier). Wie verschiebt sich das Gleichgewicht, wenn man durch ein Schädlingsbekämpfungsmittel die Wachstumsrate  $\alpha$  der Schädlinge auf ein Zehntel senkt und (wegen der Nebenwirkungen)  $\gamma$  um 10% erhöht?

Abgabe bis zum Montag, dem 4. Dezember 2006, um 15.30 Uhr