

23. Oktober 2006

6. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist auch $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- 2) *Richtig oder falsch:* Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt auch für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Funktion
$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$
 in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- 3) *Richtig oder falsch:* Für jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Falls $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert und nicht verschwindet, liegt f nicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- 5) *Richtig oder falsch:* $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $T(\varphi) = \varphi(0) - |\varphi(2)|$ ist eine Distribution.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

- a) What are the L^2 norms of the functions

$$f(t) = \left\| \frac{1}{1+it} \right\|_2, \quad g(t) = \frac{1}{\cosh t} \quad \text{and} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists n \in \mathbb{N}: n - \frac{1}{2n^2} < t < n + \frac{1}{2n^2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} ?$$

Hint: $\frac{d}{dt} \tanh t = \frac{1}{\cosh^2 t}$

- b) Determine the L^2 norms of the FOURIER transforms $\hat{f}(\omega)$, $\hat{g}(\omega)$ and $\hat{h}(\omega)$!
- c) Compute $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$ and $\hat{h}(\omega)$!

Aufgabe 2: (3 Punkte)

- a) Was ist die FOURIER-Transformierte der DIRAC-Distribution Δ_a ?
- b) Gibt es eine Funktion f , so daß $\hat{\Delta}_a = T_f$ ist?
- c) Was gilt im Spezialfall $a = 0$?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre Ableitungen im Distributionensinne. Geben Sie diese Ableitungen, eventuell unter Verwendung von $\delta(t)$, auch als „Funktionen“ an!

- a) $f(t) = [t]$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl $s \leq t$ bezeichnet. b) $g(t) = t - [t]$
- c)
$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ t+1 & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ t-1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Abgabe bis zum Montag, dem 30. Oktober 2006, um 15.30 Uhr