

23. Oktober 2006

## 6. Übungsblatt Höhere Mathematik II

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  und  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist auch  $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
- 2) *Richtig oder falsch:* Für  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  liegt auch für jedes  $r \in \mathbb{R}$  die Funktion 
$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$
 in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .
- 3) *Richtig oder falsch:* Für jede Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ .
- 4) *Richtig oder falsch:* Falls  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  für eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  existiert und nicht verschwindet, liegt  $f$  nicht in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .
- 5) *Richtig oder falsch:*  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $T(\varphi) = \hat{\varphi}(0) - |\varphi(2)|$  ist eine Distribution.

**Aufgabe 1:** (7 Punkte)

- a) What are the  $L^2$  norms of the functions

$$f(t) = \left\| \frac{1}{1+it} \right\|_2, \quad g(t) = \frac{1}{\cosh t} \quad \text{and} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} : n - \frac{1}{2n^2} < t < n + \frac{1}{2n^2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} ?$$

*Hint:*  $\frac{d}{dt} \tanh t = \frac{1}{\cosh^2 t}$

- b) Determine the  $L^2$  norms of the FOURIER transforms  $\hat{f}(\omega)$ ,  $\hat{g}(\omega)$  and  $\hat{h}(\omega)$ !
- c) Compute  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$  and  $\hat{h}(\omega)$ !

**Aufgabe 2:** (3 Punkte)

- a) Was ist die FOURIER-Transformierte der DIRAC-Distribution  $\Delta_a$ ?
- b) Gibt es eine Funktion  $f$ , so daß  $\hat{\Delta}_a = T_f$  ist?
- c) Was gilt im Spezialfall  $a = 0$ ?

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre Ableitungen im Distributionensinne. Geben Sie diese Ableitungen, eventuell unter Verwendung von  $\delta(t)$ , auch als „Funktionen“ an!

- a)  $f(t) = [t]$ , wobei  $[t]$  die größte ganze Zahl  $s \leq t$  bezeichnet.      b)  $g(t) = t - [t]$
- c) 
$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ t+1 & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ t-1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Abgabe bis zum Montag, dem 30. Oktober 2006, um 15.30 Uhr