

9. Oktober 2006

4. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

1) Zeigen Sie: Für eine gerade Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\hat{f}(\omega)$ existiert, ist

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt.$$

2) Finden Sie eine entsprechende Formel für ungerade Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$!

3) Was können Sie über die LAPLACE-Transformierten von geraden und ungeraden Funktionen sagen?

4) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verschwinde für alle $t < 0$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\hat{f}(\omega) = \mathcal{L}\{f(t)\}(i\omega)$.

5) Was ist $\mathcal{L}\{\sin(at + b)\}(s)$?

6) *Richtig oder falsch:* Für $f(t) = e^{-t^2}$ existiert $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Berechnen Sie die LAPLACE-Transformierte der Rechteckschwingung mit Periode 2π , für die gilt

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} !$$

Stellen Sie das Ergebnis nicht als unendliche Summe dar, sondern durch einen möglichst einfachen Ausdruck!

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre FOURIER- und LAPLACE-Transformierten:

a) $f(t) = \max(0, 2 - 3|t|)$

b) $g(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{für } |t| < 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

c) $h(t) = \begin{cases} |\sin 2t| & \text{für } |t| < 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

a) Zeigen Sie: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$!

Hinweis: Machen Sie im Γ -Integral die Substitution $u = \sqrt{t}$, und verwenden Sie das aus der HM I bekannte Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$!

b) Berechnen Sie die LAPLACE-Transformierte von $f(t) = t^{5/2}$!

Abgabe bis zum Montag, dem 16. Oktober 2006, um 15.30 Uhr