Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. Oktober 2006

3. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Wenn die Fourier-Reihe von f für $t = t_0$ das Gibbs-Phänomen zeigt, konvergiert sie dort nicht gegen $f(t_0)$.

2) Die konstante Funktion $f(t) \equiv 1$ ist periodisch mit jeder Periode T. Was ist $1 * 1$ in Abhängigkeit von T ?

3) *Richtig oder falsch:* Für jede Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $1 * f = f$.

4) Berechnen Sie $f * g$ für $f(t) = e^{p \cdot i\omega t}$ und $g(t) = e^{q \cdot i\omega t}$ in Abhängigkeit von p und q !

5) *Richtig oder falsch:* Für beliebiges $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $g \in P_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt $f * g$ in $P_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

6) Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$, wohin die Fourier-Reihe der periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode zehn und $f(t) = t^2$ für $0 \le t < 10$ konvergiert!

7) An welchen Stellen tritt das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für $c \le t < c + T$ definiert durch $f(t) = p + \dfrac{t-c}{T} \cdot (q - p)$ mit $c, p, q \in \mathbb{R}$ und $T > 0$; sie werde periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$ mit Periode T.

a) Skizzieren Sie die Funktion f !

b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe S_f von f.

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $S_f(t) = f(t)$, und welchen Wert hat $S_f(t)$ sonst?

d) Wo gibt es Überschwingungen (Gibbs-Phänomen)? Welchen Absolutbetrag haben sie?
Hinweis: Wenn Sie mit den aus der Vorlesung bekannten Reihen vergleichen, können Sie diese Aufgabe auch lösen, ohne ein einziges Integral zu berechnen. Sie sollten allerdings die Additionsformel $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ kennen.

Problem 2: (*7 points*)

The *distortion rate* of a periodic function $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ with complex Fourier series $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ is $\kappa = \sqrt{\dfrac{\sum_{|k|>1} |c_k|^2}{\sum_{|k|>0} |c_k|^2}}$. Explain this name and compute the distortion rates of

a) $f(t) = \sin t$

b) $f(t) = |\sin t|$

c) the switching function $f(t) = \begin{cases} h & \text{for } 0 \le t < T/2 \\ -h & \text{for } T/2 \le t < T \end{cases}$

d) the saw tooth $f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2}$ for $0 \le t < T$!

Abgabe bis zum Montag, dem 9. Oktober 2006, um 15.30 Uhr