

18. September 2006

1. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* $\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ ist eine auf \mathbb{C} holomorphe Funktion.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $z \mapsto z|z|$ ist holomorph.
- 3) *Richtig oder falsch:* Jede holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ist konstant.
- 4) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Re f(x + iy) = u(x, y) = x^2 - y^2$! Ist f eindeutig bestimmt?
- 5) *Richtig oder falsch:* Die Funktionen $f(z) = \frac{1}{|z|}$ ist meromorph auf \mathbb{C} .

Aufgabe 1: (7 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft $z^2 = i$!
- b) Zeigen Sie: Jede komplexe Zahl vom Betrag eins läßt sich in der Form $\frac{z}{|z|}$ schreiben, wobei der Betrag von z beliebig vorgegeben werden kann.
- c) Schreiben Sie $\sin^2 x - \cos^2 x$ als Summe reiner Sinus- und Cosinusterme!
- d) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion!

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 256}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{20x}{(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)} dx$!