

Im für uns wichtigsten Fall $n = m = 2$ oder 3 gibt es aber eine andere Möglichkeit der Veranschaulichung: Für $\mathbf{x} \in D$ läßt sich $f(\mathbf{x})$ als Vektor auffassen, und f kann veranschaulicht werden, indem man für hinreichend viele Punkte $\mathbf{x} \in D$ diesen Vektor (oder ein geeignetes konstantes Vielfaches davon) im Punkt \mathbf{x} anträgt; siehe dazu die Abbildungen 38 und 39.

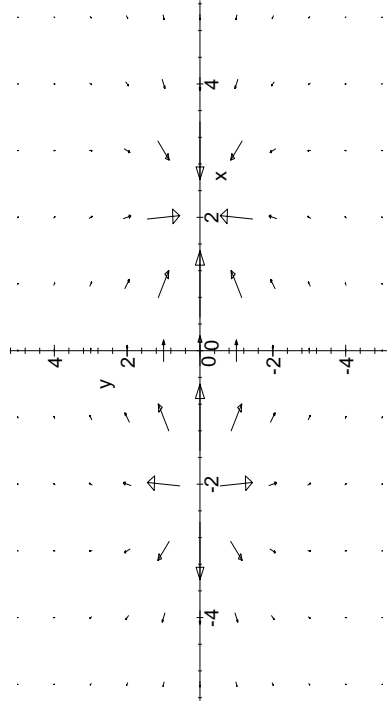


Abb. 38: Das elektrische Feld zweier entgegengesetzter gleicher Punktladungen

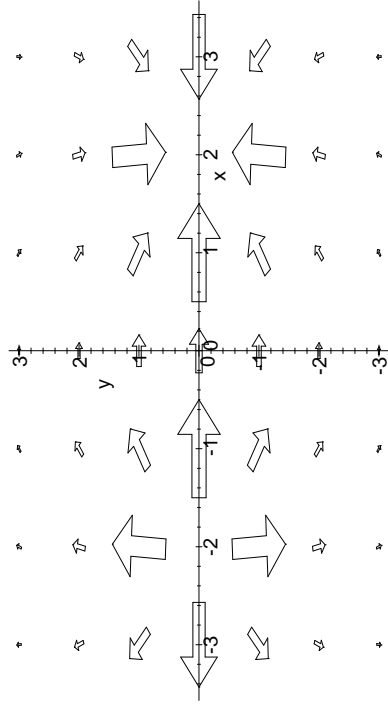


Abb. 39: Dasselbe Feld in einem kleineren Bereich mit „flächigen“ Vektoren

Wie Abbildung 38 zeigt, kann es dabei bei betragsmäßig stark variierenden Funktionswerten zu Problemen kommen: Wie man die Konstante auch wählt, mit der alle Vektoren multipliziert werden, hat man immer entweder einige extrem lange Vektoren oder aber Vektoren, die so kurz sind, daß man nichts mehr erkennen kann: Ab einer gewissen Entfernung vom Zentrum sind die Richtungen des Felds praktisch nicht mehr wahrnehmbar. Eine leichte Verbesserung ergibt sich, wenn man wie in Abbildung 39 die Vektoren „flächig“ zeichnet, wobei die Länge des Vektors proportional zur Fläche des eingezeichneten Pfeils ist, aber auch das hilft nicht sehr viel.

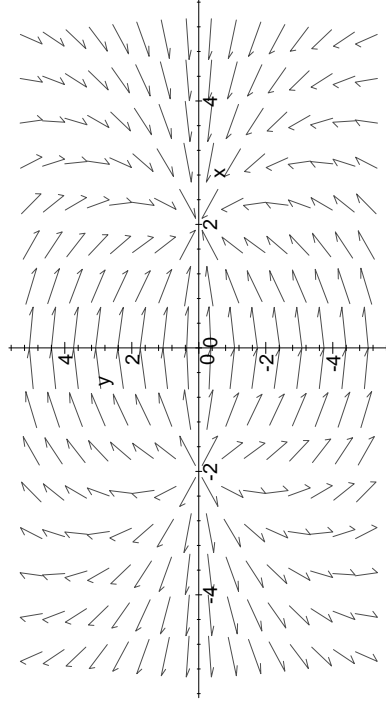


Abb. 40: Das Richtungsfeld zum obigen Feld

Da gerade die Richtung sehr wesentlich für die Konstruktion von Feldlimiten ist, begnügt man sich oft damit, nur die Richtungen darzustellen, ansonsten aber sämtlichen Vektoren dieselbe Länge zu geben; siehe dazu etwa Abbildung 40. Dadurch geht zwar ein Teil der Information verloren, aber das entsprechende Bild kann trotzdem oft mehr aussagen, als eines, bei dem fast alle Pfeile visuell zu Punkten degeneriert sind. Auch bei der Darstellung als Richtungsfeld müssen allerdings natürlich alle Punkte \mathbf{x} , für die $f(\mathbf{x}) = (0, \dots, 0)$ ist, durch Punkte oder überhaupt nicht dargestellt werden, denn dort gibt es keine Richtung.

a) Der Begriff des Vektorfelds

Nicht nur zur Veranschaulichung kann es nützlich sein, die Werte einer Funktion als Vektoren zu betrachten: Die für uns wichtigsten Beispiele von Funktionen mehrerer Veränderlicher, deren Wert nicht in \mathbb{R} sondern in einem \mathbb{R}^n liegt, sind die aus der Physik bekannten Felder wie etwa ein Kraftfeld, ein elektrisches Feld oder ein Magnetfeld. Da solche Felder typischerweise als Vektoren geschrieben werden, schreiben wir deshalb in diesem Paragraphen die *Funktionswerte* vektoriell, wohingegen die Argumente weiterhin Punkte sind, die als Tupel geschrieben werden. Wir betrachten somit Funktionen

$$\vec{V}: D \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto \vec{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} V_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ V_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

wobei die Komponentenfunktionen $V_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ genau die im vorigen Paragraphen betrachteten skalarwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher sind.

Der mathematische Begriff, der physikalische Felder beschreibt, ist der des Vektorfelds:

Definition: Ein Vektorfeld auf der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\vec{V}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(Da die typischen elektromagnetischen Felder wie \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} oder auch das Kraftfeld \vec{F} üblicherweise durch Großbuchstaben bezeichnet werden, verwenden wir auch für Vektorfelder meist Großbuchstaben wie \vec{V} oder \vec{W} .)

b) Die Jacobi-Matrix

Sowohl bezüglich der Maximumnorm als auch bezüglich der Euklidischen Norm (und in der Tat jeder möglichen Norm auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m) ist klar, daß eine Funktion $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann stetig bzw. differenzierbar ist, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig bzw. differenzierbar sind. Entsprechend definieren wir

auch die Menge $C^k(D, \mathbb{R}^m)$ aller k -fach stetig differenzierbarer Funktionen von D nach \mathbb{R}^m als Menge aller Funktionen, deren Komponenten $f_i \in C^k(D, \mathbb{R})$ k -mal stetig differenzierbar sind.

Wie bei skalarwertigen Funktionen überlegt sich leicht, daß $C^k(D, \mathbb{R}^m)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum ist.

Bei einer differenzierbare Funktion \vec{f} gilt für jede ihrer Komponenten

$$f_i(\mathbf{x} + \vec{h}) = f_i(\mathbf{x}) + \text{grad } f_i(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} + o(\|\vec{h}\|),$$

wobei der Punkt hier für das Skalarprodukt von Vektoren steht. Im Hinblick auf vektorwertige Funktionen ist es aber besser, anstelle des Skalarprodukt ein Matrixprodukt zu verwenden; dazu müssen wir den Gradienten als Zeilenvektor schreiben, d.h. wenn \cdot das Matrixprodukt bezeichnet, ist

$$f_i(\mathbf{x} + \vec{h}) = f_i(\mathbf{x}) + {}^t \text{grad } f_i(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} + o(\|\vec{h}\|).$$

In dieser Notation können wir die als Zeilenvektoren aufgefaßten Gradienten zu einer $m \times n$ -Matrix zusammenfassen, der JACOBI-Matrix

$$J_{\vec{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} {}^t \text{grad } f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ {}^t \text{grad } f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Matrix ist dann

$$\vec{f}(\mathbf{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\mathbf{x}) + J_{\vec{f}}(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} + o(\|\vec{h}\|),$$

wobei hier das Produkt als Matrixprodukt zu verstehen wird und das Symbol $o(\|\vec{h}\|)$ schlampigerweise auch für einen Vektor benutzt wird, dessen sämtliche Komponenten $o(\|\vec{h}\|)$ sind.

c) Die Divergenz eines Vektorfelds

Die JACOBI-Matrix eines Vektorfelds hängt stark ab vom gewählten Koordinatensystem. Wir wollen aus dieser Matrix Größen ableiten, von denen wir später sehen werden, daß sie *intrinsic*, d.h. also vom Koordinatensystem unabhängige Eigenschaften des Vektorfelds beschreiben.

Definition: a) Die *Spur* einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist die Summe

$$\text{Spur } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

der Diagonalelemente von A .

b) Die Spur der JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}(\mathbf{x})$ eines Vektorfelds heißt *Divergenz* oder *Quelldichte* von \vec{V} :

$$\text{div } \vec{V}(\mathbf{x}) = \text{Spur } J_{\vec{V}}(\mathbf{x}).$$

Man überlegt sich leicht, daß sich die Spur einer Matrix bei einem Basiswechsel nicht ändert: Aus der definierenden Formel für die Determinante folgt leicht, daß Spur A der Koeffizient von λ^{n-1} in $\det(A + \lambda E)$ ist, und diese Determinante bleibt natürlich invariant bei Basiswechsel. Insbesondere ist die Spur im Falle einer diagonalisierbaren Matrix stets gleich der Summe der Eigenwerte.

Um ein anschauliches Verständnis von der Divergenz zu bekommen, betrachten wir den (sehr speziellen) Fall, daß die JACOBI-Matrix von \vec{V} eine Diagonalmatrix ist:

$$J_{\vec{V}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann ist für jeden Einheitsvektor \vec{e}_i

$$\vec{V}(\mathbf{x} + h\vec{e}_i) = \vec{V}(\mathbf{x}) + h \cdot J_{\vec{V}}(\mathbf{x})\vec{e}_i + o(h) = \vec{V}(\mathbf{x}) + h\lambda_i\vec{e}_i + o(h),$$

und für einen beliebigen Vektor $\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + \dots + h_n\vec{e}_n$ ist

$$\vec{V}(\mathbf{x} + \vec{h}) = \vec{V}(\mathbf{x}) + J_{\vec{V}}(\mathbf{x})\vec{h} + o(\|\vec{h}\|) = \vec{V}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 \\ \vdots \\ \lambda_n h_n \end{pmatrix} + o(\|\vec{h}\|).$$

Falls alle λ_i positiv sind, hat hier jede Komponente des Vektors $\vec{V}(\mathbf{x}) + J_{\vec{V}}(\mathbf{x})\vec{h}$ dasselbe Vorzeichen wie die entsprechende Komponente von \vec{h} ; entfernt man sich also vom Punkt \mathbf{x} , so zeigt auch die Veränderung des Vektorfelds \vec{V} weg vom Punkt \mathbf{x} und umgekehrt; die Situation

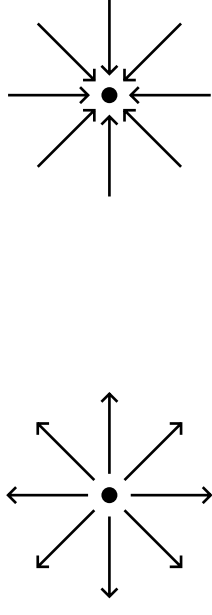


Abb. 41: Quellen und Senken

ist also ungefähr so wie auf der linken Seite von Abbildung 41. Man bezeichnet \mathbf{x} in einem solchen Fall als eine *Quelle* des Vektorfelds \vec{V} .

Falls alle λ_i negativ sind, gehen die Änderungen jeweils in Gegenrichtung, es sieht also ungefähr so aus wie im rechten Teil von Abbildung 41, und man spricht von einer *Senke*.

Im allgemeinen werden allerdings weder *alle* λ_i positiv noch *alle* λ_i negativ sein; die Divergenz als Summe der λ_i sagt uns dann, ob sich der Punkt eher wie eine Quelle oder eher wie eine Senke verhält.

Nun wird es natürlich nur selten vorkommen, daß die JACOBI-Matrix eine Diagonalmatrix ist; wie wir am Ende dieses Kapitels sehen werden, ist die Divergenz trotzdem auch im allgemeinen Fall eine Maßzahl dafür, ob ein Punkt Quelle oder Senke ist, und zwar in einer viel präziseren Weise, als es die obige Diskussion für Diagonalmatrizen zeigte.

Im übrigen sind Diagonalmatrizen doch nicht so speziell, wie es zunächst den Anschein hat: Beispielsweise läßt sich immer dann, wenn der \mathbb{R}^n eine Basis aus Eigenvektoren der betrachteten Matrix hat, ein Koordinatensystem finden, bezüglich dessen sie Diagonalform hat. Im nächsten Semester werden wir sehen, daß dies bei symmetrischen Matrizen immer der Fall ist; zumindest für den symmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix ist die obige Diskussion also richtig. Mit dem antisymmetrischen Anteil beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

In diesem Abschnitt wollen wir uns nur noch überlegen, wie man die Divergenz eines Vektorfelds tatsächlich ausrechnet. Die Divergenz ist

nach Definition gleich der Spur der JACOBI-Matrix, also ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \operatorname{Spur} J_{\vec{V}}(x) = \operatorname{Spur} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} & \frac{\partial V_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Genauso wie wir den Gradienten einer skalarwertigen Funktion f auch als ∇f schreiben, schreiben wir die Divergenz eines Vektorfelds \vec{V} auch als $\nabla \vec{V}$. Beides kann formal auch als Produkt bzw. Skalarprodukt mit einem vektorwertigen Operator interpretiert werden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}.$$

Diese Interpretation darf allerdings nicht zu ernst genommen werden, denn obwohl Skalarprodukt und Produkt mit einem Skalar beide kommutativ sind, ist weder die Gleichung $\nabla \vec{V} = \vec{V} \nabla$ noch die Gleichung $\nabla f = f \nabla$ auch nur annähernd sinnvoll, geschweige denn richtig.

d) Vektorprodukt und Rotation im Dreidimensionalen

Erinnern wir uns zunächst an symmetrische und antisymmetrische Matrizen: Eine Matrix heißt *symmetrisch*, wenn sie gleich ihrer transponierten ist, wenn also $a_{ij} = a_{ji}$ ist für alle Indexpaare (i, j) ; sie heißt *antisymmetrisch*, wenn ${}^tA = -A$ ist, d.h. $a_{ij} = -a_{ji}$. Jede reelle Matrix A kann

als Summe einer symmetrischen Matrix S und einer antisymmetrischen Matrix T geschrieben werden, denn mit

$$S = \frac{1}{2}(A + {}^tA) \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{2}(A - {}^tA) \quad \text{ist} \quad S + T = A.$$

Wie wir im nächsten Semester sehen werden, ist jede symmetrische reelle Matrix diagonalisierbar, und da bedeutet, daß uns die Divergenz eines Vektorfelds recht viel Information gibt über den symmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix.

Über den antisymmetrischen Anteil kann sie uns nichts sagen, denn aus $a_{ij} = -a_{ji}$ folgt insbesondere, daß alle Diagonaleinträge a_{ii} verschwinden müssen, d.h. der antisymmetrische Anteil liefert keine Beiträge zur Spur einer Matrix.

Wir wollen uns überlegen, wie der antisymmetrische Anteil im Fall kleiner Dimensionen aussieht.

Für $n = 1$ ist jede $n \times n$ -„Matrix“ symmetrisch, es gibt als keinen antisymmetrischen Anteil.

Für $n = 2$ hat jede antisymmetrische Matrix A die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

für den antisymmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix ist

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right).$$

Damit ist der antisymmetrische Anteil durch diese eine Zahl bestimmt.

Für $n > 3$ gibt es keine einfachere Darstellung des antisymmetrischen Anteils als die schiefssymmetrische Matrix selbst, bleibt also noch der für viele Anwendungen besonders wichtige Fall $n = 3$.

Eine antisymmetrische 3×3 -Matrix A hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

hängt also nur von drei Parametern ab. Da drei auch die Dimension des \mathbb{R}^3 ist, können wir diese als Komponenten eines Vektors interpretieren und hoffen, daß sich das Produkt von \mathcal{A} mit einem Vektor als ein Produkt zweier Vektoren auffassen läßt. Dieses Produkt muß allerdings – im Gegensatz zum Skalarprodukt – zwei Vektoren wieder einen Vektor zuordnen.

Ein solches Produkt gibt es nur im Dreidimensionalen; dort leistet das (vielleicht aus der Schule bekannte) Vektorprodukt oder Kreuzprodukt das Verlangte. Wie schon der Name sagt, ordnet es je zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} aus \mathbb{R}^3 einen *Vektor* zu, und dieser wird mit $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Er ist festgelegt durch folgende Eigenschaften:

- $\vec{v} \times \vec{w}$ hat die Länge $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| |\vec{w}| |\sin \angle(\vec{v}, \vec{w})|$. Insbesondere ist also $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$, wenn \vec{v} und \vec{w} auf einer Geraden liegen, denn dann bilden sie einen Winkel von null oder 180 Grad, so daß der Sinus verschwindet.
- $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht sowohl auf \vec{v} als auch auf \vec{w} . Falls $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$ ist, spannen \vec{v} und \vec{w} eine Ebene auf, auf der (da wir im \mathbb{R}^3 sind) genau ein eindimensionaler Unterraum senkrecht steht. Darin gibt es allerdings für jede vorgegebene positive Länge zwei Vektoren, die sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Um $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festzulegen, brauchen wir daher noch eine weitere Bedingung:
- Die drei Vektoren \vec{v} , \vec{w} und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem, d.h. wenn sich die Finger der *rechten* Hand so ausrichten lassen, daß der Daumen in Richtung von \vec{v} zeigt, der Zeigefinger in Richtung von \vec{w} und der Mittelfinger in Richtung von $\vec{v} \times \vec{w}$.

Alternativ kann man ein Rechtssystem auch so definieren, daß sich, ein von \vec{v} nach \vec{w} gedrehter Korkenzieher in Richtung $\vec{v} \times \vec{w}$ in den Kork bohrt. Ähnlich geht es auch mit Schrauben; da es allerdings neben den (üblichen) Rechtsschrauben auch die (seltenen) Linksschrauben gibt, ist diese Definition eventuell zirkulär: Alles hängt davon ab, wie man Rechtsschrauben definiert.

Aus jeder dieser Regeln folgt sofort die *Antikommutativität* des Vektorprodukts:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}.$$

Weitere Rechenregeln lassen sich leicht geometrisch ableiten: Da der Sinus eines Winkels gleich Gegenkathete durch Hypothenuse ist, ist in der von \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Ebenen $|\vec{w}| |\sin \angle(\vec{v}, \vec{w})|$ gleich der Länge des auf die senkrecht auf \vec{v} stehenden Geraden projizierten Vektors \vec{w} , das heißt also gleich der Höhe des in Abbildung 42 eingezeichneten Rechtecks. Die Länge des Vektors $\vec{v} \times \vec{w}$ ist daher gleich dem Flächeninhalt dieses Rechtecks und damit – wie eine Scherung zeigt – gleich der Fläche des von \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Parallelogramms.

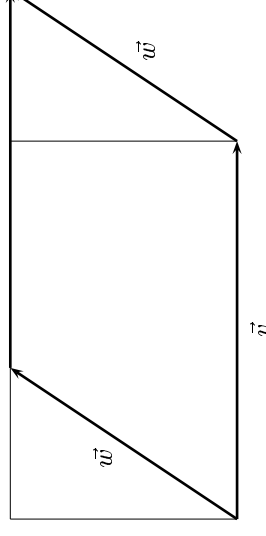


Abb. 42: Geometrische Interpretation des Vektorprodukts

Dies zeigt das Distributivgesetz

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

für den zweiten Faktor, und wegen der Antikommutativität folgt daraus auch das für den ersten:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}.$$

Um das Vektorprodukt in Koordinaten ausrechnen zu können, müssen wir zunächst die Produkte der Koordinateneinheitsvektoren \vec{e}_i kennen. Da sie allesamt die Länge eins haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, ist klar, daß das Produkt zweier verschiedener dieser Vektoren bis aufs Vorzeichen gleich dem dritten ist; das Vorzeichen hängt

ab von der Orientierung des Koordinatensystems. Das Produkt eines Vektors \vec{e}_i mit sich selbst ist natürlich, wie jedes Produkt eines Vektors mit sich selbst, gleich dem Nullvektor, denn der eingeschlossene Winkel ist null Grad.

Für die folgende Rechnung wollen wir annehmen, daß \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden; das ist beispielsweise dann der Fall, wenn \vec{e}_1 nach rechts, \vec{e}_2 nach vorne und \vec{e}_3 nach oben zeigt. Dann folgt sofort, daß

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

ist, und nach einigen Fingerübungen auch findet man auch die Formeln

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \text{und} \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2.$$

Die Produkte mit vertauschten Faktoren sind natürlich gerade das negative davon, und $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0$. Für

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) \times (w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3),$$

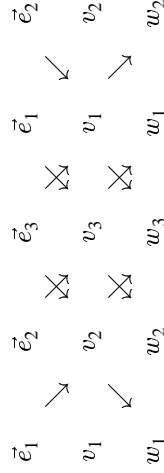
und nach obigen Rechenregeln ist dies gleich

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i w_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j = (v_2 w_3 - v_3 w_2)\vec{e}_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\vec{e}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\vec{e}_3,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Dies läßt sich dadurch merken, daß man im Schema



von \vec{e}_i ausgeht und als dessen Koeffizient das Zweierprodukt entlang der schrägen Linie nach rechts unten *positiv* und das entlang der schrägen Linie nach links unten *negativ* nimmt; man wendet also die SARRUSSCHE Regel an auf die „Determinante“

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Das Produkt einer schiefssymmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y + \beta z \\ -\alpha x + \gamma z \\ -\beta x - \gamma y \end{pmatrix},$$

während ein Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{x}$ sich zu

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

berechnet, d.h.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \beta \\ \beta & -\alpha \\ -\alpha & -\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Somit entspricht im Dreidimensionalen die Multiplikation mit einer schiefssymmetrischen Matrix genau dem Vektorprodukt (das im übrigen auch nur im Dreidimensionalen definierbar ist).

Der Vektor \vec{a} läßt sich für das Produkt mit dem schiefssymmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix leicht ausrechnen: Die JACOBI-Matrix

$$J_{\vec{V}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

eines dreidimensionalen Vektorfelds \vec{V} hat antisymmetrischen Anteil

$$A = \frac{1}{2} (A - {}^t A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial y} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z} & \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} & 0 \end{pmatrix},$$

und wie wir uns gerade überlegt haben, ist für jeden Vektor \vec{v}

$$A\vec{v} = \vec{a} \times \vec{v} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Da der Faktor $\frac{1}{2}$ in konkreten Rechnungen nur hinderlich wäre, betrachten wir den Vektor $2\vec{a}$ und definieren:

Definition: $\vec{V}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei ein Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann bezeichnen wir das Vektorfeld

$$\text{rot } V: D \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

als Rotation von \vec{V} .

Für ein Vektorfeld $\vec{V} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$, dessen JACOBI-Matrix symmetrischen Anteil S hat, ist also

$$\vec{V}(\mathbf{x} + \vec{h}) = \vec{V}(\mathbf{x}) + S\vec{h} + \frac{1}{2}(\text{rot } \vec{V}) \times \vec{h} + o(\|\vec{h}\|).$$

Der Name *Rotation* wird im folgenden (etwas umfangreichen) Beispiel verständlich: Wir gehen aus vom Vektor

$$\vec{a} = 2 \text{ rot } \vec{V}(\mathbf{x}).$$

Nach Definition des Vektorprodukts steht $\vec{a} \times \vec{h}$ senkrecht sowohl auf \vec{a} als auch auf \vec{h} . Bedenkt man noch, daß Vektoren Äquivalenzklassen von Pfeilen sind, die man sich nicht unbedingt so vorstellen muß, daß sie alle im selben Punkt beginnen, bietet sich folgende Interpretation an: Wenn wir den Vektor \vec{h} um die von \vec{a} aufgespannte Achse drehen, zeigt $\vec{a} \times \vec{h}$ in Richtung der Tangente der Bahn des Endpunkts von \vec{h} . (Damit dies stimmt, muß die Achse so orientiert werden, daß sich \vec{h} im mathematisch positiven, d.h. Gegenuhzigersinn, um \vec{a} dreht. Von der Ebene der Uhr aus gesehen zeigt dann \vec{a} nach oben, \vec{h} zu dem sich drehenden Punkt, und $\vec{a} \times \vec{h}$ in Richtung des Gegenuhzigersinns, wie man sich z.B. mit der Dreifingerregel leicht veranschaulicht.)

Der antisymmetrische Anteil der JACOBI-Matrix sollte also etwas mit einer Drehbewegung zu tun haben, genauer gesagt mit deren Geschwindigkeitsvektor, denn dieser zeigt in Richtung der Tangente der Bahnkurve.

Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir zunächst eine einfache Drehung eines Vektors um die z -Achse mit Drehwinkel φ . Diese ist aufgrund der Definition von Sinus und Cosinus ausdrückbar durch die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} x &\mapsto x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y &\mapsto x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z &\mapsto z \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ um eine beliebige Achse drehen; der Drehwinkel sei weiterhin φ . Dazu sei \vec{a} der Einheitsvektor in Richtung der Achse; er sei so orientiert, daß der Drehsinn (bei positivem Winkel φ) gleich dem Gegenuhzigersinn ist. Dann gelten in den auf \vec{a} senkrecht stehenden Ebenen im wesentlichen dieselbe Formeln, falls wir nur die Koordinateneinheitsvektoren der x - und der y -Achse ersetzen durch zwei aufeinander und auf \vec{a} senkrecht stehende gleichlange Vektoren. Als ein solcher Vektor bietet sich der Verbindungsvektor \vec{r} von der Achse zum Punkt \mathbf{x} an, d.h. jener Vektor, der den Abstand zwischen \mathbf{x} und der Achse beschreibt. Ein sowohl auf \vec{a} als auch auf \vec{a} senkrecht stehender Vektor ist $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{r}$; da \vec{a} die Länge eins hat, ist \vec{s} genauso lang wie \vec{r} . In der von \vec{r} und \vec{s} aufgespannten Ebene bildet die Drehung um den Winkel φ somit den Vektor $\alpha\vec{r} + \beta\vec{s}$ ab auf

$$(\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi) \vec{r} + (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \vec{s}.$$

Nun zerlegen wir den Ortsvektor \vec{x} eines Punktes \mathbf{x} in einen Vektor \vec{x}_a auf der Achse und den radialen, d.h. senkrecht auf der Achse stehenden, Anteil \vec{r} .

\vec{x}_a ist die Projektion von \vec{x} auf die Drehachse; da wir \vec{a} als Einheitsvektor vorausgesetzt haben, ist dies nach den allgemeinen Regeln der Vektorrechnung einfach

$$\vec{x}_a = (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a},$$

denn die Länge des Vektors wird bei der Projektion mit dem Cosinus des Winkels zur Achse multipliziert, und die Richtung des auf die Achse projizierten Vektors ist natürlich gleich der Richtung der Achse.

Damit läßt sich auch die radiale Komponente problemlos berechnen: Da beide Komponenten zusammen den Vektor \vec{x} ergeben müssen, ist

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_a = \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a}.$$

Nun ist \vec{x}_a parallel zu \vec{a} , und das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren verschwindet. Deshalb können wir auch schreiben

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{r} = \vec{a} \times (\vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{x}.$$

Da die Axialkomponente eines Vektors bei Drehungen erhalten bleibt, wird speziell der Vektor $\vec{x} = \vec{x}_a + \vec{r}$ also abgebildet auf

$$\begin{aligned} & \vec{x}_a + \cos \varphi \vec{r} + \sin \varphi \vec{s} \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{a}) \vec{a} + \cos \varphi \left(\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{a}) \vec{a} \right) + \sin \varphi \vec{a} \times \vec{x} \\ &= (1 - \cos \varphi)(\vec{x} \cdot \vec{a}) \vec{a} + \cos \varphi \vec{x} + \sin \varphi \vec{a} \times \vec{x}. \end{aligned}$$

Um den Geschwindigkeitsvektor einer Drehung auszurechnen, müssen wir diese zunächst zu einem dynamischen Prozeß machen, d.h. anstelle einer Drehung mit konstantem Drehwinkel φ betrachten wir eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω . Wir gehen wieder aus von einem festen Punkt \vec{x} und betrachten dessen Position zum Zeitpunkt t , d.h. wir betrachten die Funktion

$$\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}: t \mapsto (1 - \cos \omega t)(\vec{x} \cdot \vec{a}) \vec{a} + \cos \omega t \vec{x} + \sin \omega t \vec{a} \times \vec{x}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor im Punkt \vec{x} ist die Ableitung dieser Funktion im Nullpunkt, also der Vektor

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(0) = \left(\omega \sin \omega t (\vec{x} \cdot \vec{a}) \vec{a} - \omega \sin \omega t \vec{x} + \omega \cos \omega t \vec{a} \times \vec{x} \right) \Big|_{t=0} = \omega \vec{a} \times \vec{x}.$$

Mit anderen Worten: Bei der Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω um die von \vec{a} aufgespannte Achse ist der Geschwindigkeitsvektor im Punkt \vec{x} gleich $\omega \vec{a} \times \vec{x}$.

Der Vektor $\omega \vec{a}$ läßt sich auffassen als eine vektorielle Winkelgeschwindigkeit (die in der Physik in der Tat genau so definiert wird), und für einen beliebigen Vektor $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\vec{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \vec{x} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{x}$$

das Feld der Geschwindigkeitsvektoren zu einer Rotation mit vektorieller Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß $\text{rot } \vec{V}$ in der englischsprachigen Literatur meist als $\text{curl } \vec{V}$ geschrieben wird nach dem englischen Wort *curl* = Locke.

Wie Gradient und Divergenz können wir auch die Rotation formal mit Hilfe des Operators ∇ ausdrücken: Für ein dreidimensionales Vektorfeld \vec{V} ist

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{V}.$$

e) Erste Beispiele

Zum besseren Verständnis von Divergenz und Rotation und um den Umgang mit den beiden Begriffen zu üben, wollen wir sie für zwei einfache Felder ausrechnen: Für das elektrische Feld einer Punktladung und für das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters.

1) Das elektrische Feld einer Punktladung: Eine Punktladung q im Nullpunkt erzeugt nach dem COULOMBSchen Gesetz ein elektrisches Feld \vec{E} der Stärke

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

denn die Feldstärke nimmt mit der Entfernung vom Nullpunkt quadratisch ab und hat die Richtung (oder – je nach Vorzeichen von q – auch Gegenrichtung) des Ortsvektors., d.h. der Einheitsvektor der Richtung ist $\pm \vec{x}/|\vec{x}|$, und er muß noch durch $|\vec{x}|^2$ dividiert werden.

Das Feld \vec{E} ist nur definiert auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$; im Nullpunkt haben wir einen Nenner Null, und auch physikalisch ist es nicht sinnvoll, nach dem Feld *im Inneren* einer Punktladung zu fragen: Punktladungen sind nun einmal mathematische Idealisierungen, und wirklich anwendbar ist das COULOMBSche Gesetz ohnehin erst ab einem gewissen Mindestabstand: Bei zu kleinen Abständen spielen andere Wechselwirkungen eine wesentlich größere Rolle.

Zur Berechnung der Divergenz müssen wir die erste Komponente nach x , die zweite nach y und die dritte nach z ableiten und dann die drei Ableitungen addieren. Beachten wir, daß $|\vec{x}|^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ ist, gibt uns die Quotientenregel sofort das Ergebnis

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x}(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{|\vec{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{x}\|^3 - x \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x |\vec{x}|}{|\vec{x}|^6} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{x}|^2 - 3x^2}{|\vec{x}|^5} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|^5} (-2x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\frac{\partial E_2}{\partial y}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|^5}(x^2 - 2y^2 + z^2)$$

und

$$\frac{\partial E_2}{\partial z}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|^5}(x^2 + y^2 - 2z^2),$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|^5}(-2x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 2y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - 2z^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Rotation benötigen wir die Einträge der JACOBI-Matrix, die nicht in der Diagonale stehen; dabei werden die Komponenten von \vec{E} nach jenen Variablen abgeleitet, die *nicht* im Zähler stehen. Die Situation ist also stets dieselbe, und es genügt, wenn wir beispielsweise die Ableitung von E_1 nach y ausrechnen.

Aus den üblichen Ableitungsregeln folgt sofort, daß

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{x \cdot 2y}{|\vec{x}|^5} = -\frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{|\vec{x}|^5}$$

ist, und analog ist auch

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{y \cdot 2x}{|\vec{x}|^5} = -\frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{|\vec{x}|^5}.$$

Die x -Komponente von $\operatorname{rot} \vec{E}$ ist somit

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0,$$

und genauso überzeugt man sich auch vom Verschwinden der anderen Komponenten.

Somit ist also das Feld einer Punktladung außerhalb des Punktes selbst sowohl quellen- als auch wirbelfrei, genau wie es nach den MAXWELLSchen Gleichungen auch sein muß.

2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters: Das Magnetfeld eines von einem Strom der Stärke I durchflossenen geradlinigen Drahts ist nach dem BIOT-SAVARTSchen Gesetz

$$\vec{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi|\vec{r}|^2} \vec{a} \times \vec{x},$$

wobei \vec{a} der Einheitsvektor in Richtung des Stroms und \vec{r} der Abstandsvektor zwischen dem Draht und dem Punkt \vec{x} ist. \vec{H} ist überall im \mathbb{R}^3 erklärt, außer auf der von \vec{a} aufgespannten Geraden, wo \vec{r} der Nullvektor ist.

Zum einfacheren Rechnen wählen wir das Koordinatensystem so, daß \vec{a} der Einheitsvektor in Richtung der positiven z -Achse ist; für den Punkt mit Koordinaten (x, y, z) ist dann

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\vec{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist erklärt auf \mathbb{R}^3 minus der z -Achse; auf der z -Achse, d.h. im Innern des Leiters, bekommen wir eine Null in den Nenner.

Die drei Komponenten dieses Felds könnten wir nun wie oben nach den drei Variablen x, y, z ableiten, um so Rotation und Divergenz zu berechnen; es gibt allerdings eine einfachere Möglichkeit, die JACOBI-Matrix eines solchen Felds zu bestimmen:

Wie auch das \vec{E} -Feld im obigen Beispiel läßt sich \vec{H} schreiben als Produkt einer skalaren Funktion mit einer linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Solche Funktionen, bei denen alle Nichtlinearität in einer skalaren Funktion steckt, bezeichnen wir als *quasilinear*:

Definition: Eine Funktion $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *quasilinear*, wenn es eine Funktion $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gibt, so daß $\vec{f}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \cdot A\vec{x}$ ist.

In diesem Sinne ist $\vec{H}(x)$ quasilinear mit

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi(x^2 + y^2)} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und das obige Feld \vec{E} ist quasilinear mit

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma: Für eine quasilineare Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$J_{\vec{f}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \cdot A + (A\vec{x}) \cdot {}^t \text{grad } \varphi(\mathbf{x}).$$

In dieser Formel steht der erste Malpunkt für die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix, der zweite für das Matrixmultiplikation des Spaltenvektors $A\vec{x}$ mit dem zum Zeilenvektor transponierten Gradienten. Es geht hier also nicht um ein Skalarprodukt, sondern um eine Matrixmultiplikation, deren Ergebnis eine $n \times m$ -Matrix ist.

Ausgeschrieben wird die Formel zu

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \varphi(\mathbf{x}) \cdot a_{ij} + \left(\sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Zum Beweis leiten wir $f_i(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu$ nach x_j ab; nach der Produktregel ist, wie gewünscht,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu \\ &= \varphi(\mathbf{x}) \cdot a_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu. \end{aligned}$$

■

Dieses Lemma wenden wir gleich an auf das Feld $\vec{H}(\mathbf{x})$; hier ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{x}) = \frac{-2x \cdot I}{4\pi(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{x}) = \frac{-2y \cdot I}{4\pi(x^2 + y^2)^2},$$

d.h.

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{x}) = \frac{-2I}{4\pi(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} J_{\vec{H}}(\mathbf{x}) &= \frac{I}{4\pi(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{-2I}{4\pi(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 0 & -x^2 - y^2 & 0 \\ x^2 + y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x & -2y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 0 & -x^2 - y^2 & 0 \\ x^2 + y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 2xy & 2y^2 & 0 \\ -2x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 2xy & y^2 - x^2 & 0 \\ y^2 - x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix ist symmetrisch und hat Spur Null, d.h. auch hier ist

$$\text{div } \vec{H}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \text{rot } \vec{H}(\mathbf{x}) = \vec{0},$$

und auch dies natürlich wieder in Übereinstimmung mit den MAXWELLSchen Gleichungen.

Da die Feldlinien des hier betrachteten Felds Kreise sind, mag es auf den ersten Blick seltsam erscheinen, daß die Rotation von \vec{H} verschwindet. Der Grund liegt darin, daß alle Kreise ihren Mittelpunkt auf der z -Achse haben, die wir in der obigen Rechnung ausschließen mußten: Die Rotation in einem Punkt \mathbf{x} mißt die Rotation um \mathbf{x} , und beim betrachteten Feld rotiert eben alles um die z -Achse, so daß die Rotation überall sonst verschwindet.

f) Allgemeine Rechenregeln

Nachdem wir gerade mit relativ großem Aufwand für zwei Beispiele Divergenz und Rotation berechnet haben, wollen wir nun einige Rechenregeln herleiten, die uns unter anderem zeigen werden, daß zumindest ein Teil der obigen Rechnungen hätte vermieden werden können.

Wir wollen uns als nächstes überlegen, was passiert, wenn wir zwei der drei Operatoren grad, div und rot hintereinanderausführen – sofern dies möglich ist.

Der Gradient einer skalaren Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld; es ist also möglich, dessen Divergenz und Rotation zu berechnen. Um keine Probleme mit der Existenz und der Reihenfolge von Ableitungen zu haben, setzen wir voraus, daß f in $C^2(D, \mathbb{R})$ liegt; dann ist

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Die rechte Seite schreiben wir auch kurz als

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

und bezeichnen

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

als LAPLACE-Operator.

(Der LAPLACE-Operator ist älter als Divergenz, Gradient, Rotation und so weiter; er spielt eine große Rolle sowohl bei Wellen als auch bei Potentialfeldern. HAMILTON wählte das Zeichen ∇ in Anlehnung an diesen Operator; formal kann man $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben.)

Auch die Rotation eines Gradientenfelds läßt sich leicht berechnen, allerdings natürlich nur im \mathbb{R}^3 , da wir für andere Dimensionen keine Rotation definiert haben.

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Die Rotation eines stetig differenzierbaren Gradientenfelds ist also stets Null; da das elektrische Feld der negative Gradient des elektrischen Potentials ist, hätten wir oben also für

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|}$$

auf die Berechnung der Rotation verzichten können.

Die Divergenz eines Vektorfelds ist eine skalare Funktion; der einzige Operator, der darauf angewandt werden kann, ist daher der Gradient, und das Ergebnis ist völlig uninteressant:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{grad} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i \partial x_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_n \partial x_i} \end{pmatrix}.$$

Die Rotation eines Vektorfelds im Dreidimensionalen schließlich ist wieder ein Vektorfeld, wir können also Divergenz und Rotation davon berechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{V} &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 V_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Da ein Magnetfeld als Rotation eines Vektorpotentials geschrieben werden kann, erklärt dies, warum im obigen Beispiel $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ war.

Bleibt noch die Rotation der Rotation; für diese ist nach Aufgabe 1 des elften Übungsblatts

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}.$$

Ebenfalls dort sind auch die beiden „Produktregeln“

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f \operatorname{div} \vec{V} + (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{V}$$

und

$$\operatorname{rot}(f\vec{V}) = f \operatorname{rot} \vec{V} + (\operatorname{grad} f) \times \vec{V}$$

zu finden. Mit dem Operator ∇ geschrieben werden sie völlig analog zur klassischen LEIBNIZ-Regel:

$$\nabla \cdot (f\vec{V}) = f \nabla \cdot \vec{V} + \nabla f \cdot \vec{V}$$

und

$$\nabla \times (f\vec{V}) = f \nabla \times \vec{V} + \nabla f \times \vec{V}$$

Speziell für ein lineares Vektorfeld

$$\vec{V}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\vec{x} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist

$$\operatorname{div} \vec{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{Spur} A$$

und, im Falle $n = 3$,

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix};$$

für eine quasilineare Funktion $\vec{f}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})A\vec{x}$ ist also nach den beiden Produktregeln

$$\operatorname{div} \vec{f} = \varphi \operatorname{Spur} A + (\operatorname{grad} \varphi) \cdot A\vec{x}$$

und

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \varphi \cdot \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} + (\operatorname{grad} \varphi) \times A\vec{x},$$

was uns in den Beispielen des vorigen Abschnitts manche Rechnung erspart hätte.

g) Nichtkartesische Koordinatensysteme

Auch in diesem letzten Abschnitt von §2 soll es um Möglichkeiten gehen, wie wir bei den oben betrachteten und anderen Beispielen effizienter rechnen können. Das Feld einer Punktladung beispielsweise ist kugelsymmetrisch, jedoch haben wir bei der Berechnung von Divergenz und Rotation dieses Feldes die Kugelsymmetrie mutwillig zerstört, indem wir in einem kartesischen Koordinatensystem rechneten. Hier wollen wir uns beschäftigen, wie man Koordinatensysteme finden kann, die einer solchen Symmetrie angepaßt sind.

Entsprechend der Vielzahl möglicher Symmetrien kennt die Mathematik auch eine Vielzahl solcher Koordinatensysteme; wir wollen uns auf die beiden wichtigsten und am häufigsten angewandten beschränken: die Kugel- und die Zylinderkoordinaten. Zum Einstieg in das Thema betrachten wir aber zunächst die etwas einfachere Situation der Polarkoordinaten in der Ebene.

1) Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 : Ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ wird charakterisiert durch seinen Abstand r vom Nullpunkt O sowie den Winkel φ zwischen dem Vektor \vec{OP} und dem Einheitsvektor der (positiven) x -Achse, wobei dieser Winkel für $P = O$ nicht definiert ist. Ansonsten messen wir ihm im Bogenmaß und wählen den Drehsinn so, die Richtung von der positiven x -Achse zur positiven y -Achse positiv gerechnet wird.

Für einen Punkt mit kartesischen Koordinaten (x, y) ist dann

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist φ so bestimmt, daß gilt

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi.$$

φ ist dabei, wie üblich, natürlich nur modulo 2π bestimmt. Da Sinus und Cosinus nur auf Intervallen der Länge π injektiv sind, reicht eine der beiden Umkehrfunktionen allein nicht aus, um φ direkt anzugeben, sondern man braucht noch mindestens eine Fallunterscheidung. Eine mögliche Formel für φ , auf Basis des Arkuskosinus, ist etwa

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y < 0 \end{cases}.$$

Natürlich kann man entsprechende Formeln auch mit dem Arkussinus oder Arkustangens aufstellen.

Anstelle des Gitternetzes eines kartesischen Koordinatensystems hat man bei den Polarkoordinaten ein Netz aus Kreisen um den Nullpunkt, auf denen der Radius r konstant ist, und aus vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen, auf denen φ konstant ist.

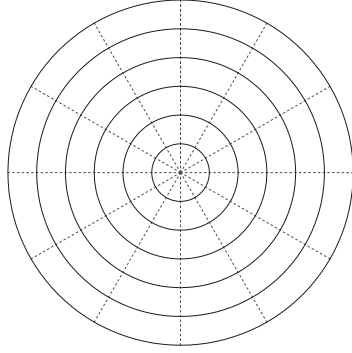


Abb. 43: Das Netz der Polarkoordinaten

Für eine Funktion $f(x, y)$ auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 können wir die Polarkoordinatendarstellung

$$F(r, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

betrachten; wir wollen sehen, wie man mit F allein immer noch den

Gradienten oder beispielsweise auch die LAPLACESche Δf berechnen kann.

Dazu müssen wir zunächst die partiellen Ableitungen von f nach x und y durch die von F nach r und φ ausdrücken. Dies ist auf direkte Weise etwas schwierig, da wir keine gute Formel für die Berechnung von φ aus x und y haben. Die umgekehrte Aufgabe dagegen ist umso einfacher: Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi.$$

Da $r > 0$ ist, können wir dies auch in der Form

$$\begin{aligned} F_r &= f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi \\ \frac{F_\varphi}{r} &= -f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi \end{aligned}$$

schreiben. Dies ist ein lineares Gleichungssystem für f_x und f_y ; wenn wir von der mit $\cos \varphi$ multiplizierten ersten Gleichung die mit $\sin \varphi$ multiplizierte zweite subtrahieren, erhalten wir

$$f_x = F_r \cos \varphi - \frac{F_\varphi}{r} \sin \varphi;$$

entsprechend erhalten wir

$$f_y = F_r \sin \varphi + \frac{F_\varphi}{r} \cos \varphi,$$

wenn wir die mit $\sin \varphi$ multiplizierte erste Gleichung zur mit $\cos \varphi$ multiplizierten zweiten addieren.

Entsprechend können wir auch die zweiten partiellen Ableitungen von f durch partielle Ableitungen von F ausdrücken, allerdings werden hier die Ausdrücke schon deutlich komplexer, so daß hier auf die detaillierte Rechnung verzichtet sei. Wichtig ist vor allem der LAPLACE-Operator,

und wenn es auch sehr umständlich wäre, dessen Darstellung in Polarkoordinaten *herzuleiten* können wir die fertige Formel

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2},$$

doch leicht und relativ schnell beweisen kann, indem wir

$$F_{rr} = (f_{xx} \cos \varphi + f_{xy} \sin \varphi) \cos \varphi + (f_{xy} \cos \varphi + f_{yy} \sin \varphi) \sin \varphi$$

und

$$F_{\varphi\varphi} = (f_{xx} r \sin \varphi - f_{xy} r \cos \varphi) r \sin \varphi - f_x r \cos \varphi - (f_{xy} r \sin \varphi - f_{yy} r \cos \varphi) r \cos \varphi - f_y r \sin \varphi$$

nach der Kettenregel berechnen und einsetzen.

2) Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3 : Für den \mathbb{R}^3 gibt es zwei naheliegende Verallgemeinerung der Polarkoordinaten: Einmal können wir in der (x, y) -Ebene Polarkoordinaten einführen, die z -Koordinate aber unverändert lassen, zum anderen können wir neben dem Abstand vom Nullpunkt zwei Winkelkoordinaten einführen, wie z.B. die geographische Länge und Breite. Hier soll es zunächst um den ersten Fall gehen, wir haben also drei Koordinaten (r, φ, z) mit $r > 0$, die über die Gleichungen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad z = z$$

mit den kartesischen Koordinaten verbunden sind. Diese Koordinaten heißen *Zylinderkoordinaten*, da die Flächen $r = \text{konstant}$ Zylinder sind. Insbesondere ist die Koordinate r hier nicht mehr gleich dem Abstand eines Punktes vom Nullpunkt, sondern gleich dem Abstand von der z -Achse.

Da die z -Koordinate des kartesischen Koordinatensystems übernommen wird, brauchen wir für diese Koordinaten nicht neu zu rechnen, sondern können die obigen Ergebnisse praktisch wörtlich übernehmen: Mit

$$F(r, \varphi, z) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

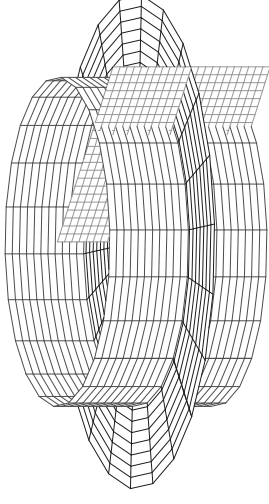


Abb. 44: Flächen mit konstantem r , φ und z für Zylinderkoordinaten

ist

$$f_x = F_r \cos \varphi - \frac{F_{\varphi}}{r} \sin \varphi$$

$$f_y = F_r \sin \varphi + \frac{F_{\varphi}}{r} \cos \varphi$$

$$f_z = F_z$$

und

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2} + F_{zz}.$$

3) Kugelkoordinaten: Hier führen wir zusätzlich zu den beiden Polarkoordinaten der Ebenen als dritte Koordinate noch eine *Winkelkoordinate* ϑ ein, wir haben also drei Koordinaten (r, φ, ϑ) , wobei r wieder positiv sein muß und den Abstand vom Nullpunkt bezeichnet.

Im Gegensatz zur Konvention der Geographen, wonach der Äquator, d.h. der Schnittkreis einer Kugel um den Nullpunkt mit der (x, y) -Ebenen, die Breite Null hat, ist es in der Mathematik, Physik und Technik üblich, dem Äquator die Koordinate $\vartheta = \pi/2$ zu geben, dem „Nordpol“, d.h. dem Schnittpunkt mit der positiven z -Achse, $\vartheta = 0$ und dem Südpol $\vartheta = \pi$. In der (x, z) -Ebene ist also

$$x = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad z = r \cos \vartheta,$$

in der (y, z) -Ebene

$$y = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad z = r \cos \vartheta,$$

und ganz allgemein ist

$$R = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad z = r \cos \vartheta,$$

wobei R den Abstand eines Punktes von der z -Achse bezeichnet.

Für einen Punkt im Abstand R von der z -Achse ist

$$x = R \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = R \sin \varphi,$$

zusammen mit den obigen Formeln erhalten wir also als Zusammenhang zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned}$$

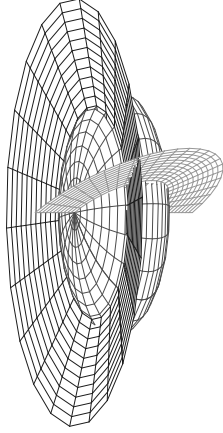


Abb. 45: Flächen mit konstantem r , φ und ϑ für Kugelkoordinaten

Die Flächen mit konstantem r sind hier natürlich Kugeln, konstantes φ führt wie bei den Zylinderkoordinaten auf Halbebenen, und die Flächen mit konstantem ϑ schließlich sind Kegel um die z -Achse.

Wieder können wir einer Funktion $f(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten durch

$$F(r, \varphi, \vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$$

eine neue Funktion zuordnen und durch Anwendung der Kettenregel sowie Lösen eines linearen Gleichungssystems die partiellen Ableitungen

zueinander in Beziehung setzen; die Vorgehensweise ist im wesentlichen wie bei den ebenen Polarkoordinaten, nur daß wir jetzt ein System aus drei linearen Gleichungen bekommen:

$$\begin{aligned} F_r &= f_x \cos \varphi \sin \vartheta + f_y \sin \varphi \sin \vartheta + f_z \cos \vartheta \\ \frac{F_\varphi}{r} &= -f_x \sin \varphi \sin \vartheta + f_y \cos \varphi \sin \vartheta \\ \frac{F_\vartheta}{r} &= f_x \cos \varphi \cos \vartheta + f_y \sin \varphi \cos \vartheta - f_z \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Der GAUSS-Algorithmus führt schnell auf die Lösung

$$\begin{aligned} f_x &= F_r \cos \varphi \sin \vartheta - \frac{F_\varphi \sin \varphi}{r \sin \vartheta} + \frac{F_\vartheta \cos \varphi \cos \vartheta}{r} \\ f_y &= F_r \sin \varphi \sin \vartheta - \frac{F_\varphi \cos \varphi}{r \sin \vartheta} + \frac{F_\vartheta \sin \varphi \cos \vartheta}{r} \\ f_z &= F_r \cos \vartheta - \frac{F_\vartheta \sin \vartheta}{r}. \end{aligned}$$

Im Prinzip genauso können auch die zweiten Ableitungen berechnet werden; eine grausame, wenn auch nicht sonderlich schwierige Rechnung führt beispielsweise auf die Formel

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\ &= F_{rr} + \frac{2F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{F_{\vartheta\vartheta}}{r^2} + \frac{F_\vartheta}{r^2 \tan \vartheta}. \end{aligned}$$

Als Beispiel wollen wir damit noch einmal die Divergenz des elektrischen Felds einer Ladung q im Nullpunkt berechnen: Diese erzeugt ein Potential

$$U(r, \varphi, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

das Feld ist $\vec{E} = -\text{grad } U$ und

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div grad } U = -\Delta U = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r} \cdot \frac{-1}{r^2} \right) = 0.$$