WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

16. August 2006

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = \sin(t+1)$!

Lösung: Nach der Additionsformel für den Sinus (s. *Hinweise* am Ende der Klausur) ist $\sin(t+1) = \sin 1 \cdot \cos t + \cos 1 \cdot \sin t$, und das ist bereits die gesuchte FOURIER-Reihe.

2) Was ist $\operatorname{Res}_{z=1} \dfrac{\sin z}{z-1}$?

Lösung: Da die Funktion bei $z = 1$ nur einen einfachen Pol hat, ist

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{\sin z}{z-1} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)\sin z}{z-1} = \sin 1\,.$$

3) Richtig oder falsch: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 0 & i \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Falsch,* denn offensichtlich ist i ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit zwei, aber der Eigenraum wird von $\binom{1}{0}$ aufgespannt und ist somit nur eindimensional.

4) Richtig oder falsch: $\sin t * \delta(t + x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$

Lösung: *Richtig,* denn $\sin t * \delta(t + x - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

5) Welche Ableitung im Distributionensinne hat die Funktion $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$? *(Es reicht, wenn Sie das Ergebnis mit Hilfe von* DIRAC*-Distributionen angeben.)*

Lösung: Bei $t = -1$ springt f um $+1$, bei $t = 1$ um -1, also ist die „Ableitung" gleich $\delta(t+1) - \delta(t-1)$.

6) Ein Widerstand R soll nach dem OHMschen Gesetz bestimmt werden, indem man verschiedene Spannungen anlegt und jeweils die Spannung U und die zugehörige Stromstärke I mißt, Der Fehler bei der Spannungsmessung sei ε, der Meßfehler für die Stromstärke sei δ. Mit welcher Genauigkeit ist dann $R = U/I$ bekannt?

Lösung: Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ist der zu erwartende Fehler von R gleich

$$\sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\delta\right)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{I^2} + \frac{U^2\delta^2}{I^4}} = \frac{1}{I}\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{U^2}{I^2}\delta^2}\,.$$

7) Die FOURIER-Transformierte von $f(t) = e^{-t^2}$ ist $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$. Welche FOURIER-Transformierte hat $g(t) = te^{-t^2}$?

Lösung: $\dot{f}(t) = -2te^{-t^2} = -2g(t)$ hat $i\omega\widehat{f}(\omega)$ als FOURIER-Transformierte; somit ist $\widehat{g}(\omega) = \frac{-i\omega}{2}\widehat{f}(\omega) = \frac{-i\omega\sqrt{\pi}}{2}e^{-\omega^2/4}$.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie die Integrale $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$ und $I_2 = \int\limits_{-1000}^{1000} \frac{x\,dx}{x^2+1}$!

Lösung: Da beinm Integral I_1 der Grad des Zählers um zwei kleiner ist als der des Nenners, ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\delta_R} \frac{dz}{z^2-2z+2}$$

für den folgenden Integrationsweg δ_R: Für reelles $R > 0$ sei zunächst γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also

$$\gamma_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}.$$

δ_R ist dann der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.
$z^2-2z+2 = (z-1)^2+1$ verschwindet für $z = 1 \pm i$; für $R > \sqrt{2}$ liegt $z_1 = 1+i$ im Innern des Halbkreises, während $z_2 = 1-i$ unter der reellen Achse und damit für kein R im Halbkreis liegt. Offensichtlich hat z_1 (wie auch z_2) als Nullstelle des Nenners die Ordnung eins, das Residuum kann daher einfacher als via Partialbruchzerlegung berechnet werden als Grenzwert

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=1+i} \frac{1}{z^2-2z+2} &= \lim_{z\to 1+i} \frac{z-(1+i)}{z^2-2z+2} = \lim_{z\to 1+i} \frac{1}{z-(1-i)} \\ &= \frac{1}{(1+i)-(1-i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz ist daher für $R > \sqrt{2}$

$$\int_{\delta_R} \frac{dz}{z^2-2z+2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1+i} \frac{1}{z^2-2z+2} = \pi.$$

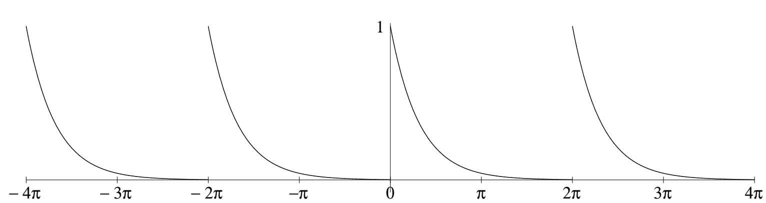
Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ verschwindet das Integral über γ_R, da der Zählergrad um zwei kleiner ist als der Nennergrad, und das Integral von $-R$ bis R konvergiert gegen das Integral von $-\infty$ bis ∞.

Das Integral I_2 kann nicht auf diese Weise berechnet werden, denn hier ist der Zählergrad des Integranden nur um eins kleiner als der Nennergrad. Da der Integrand eine ungerade Funktion ist und der Integrationsbereich symmetrisch zum Nullpunkt, sieht man hier sofort, daß das Integral verschwindet.

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*
Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $0 \le t < 2\pi$ sei $f(t) = e^{-t}$.

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist weder gerade noch ungerade.

c) Berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f !

Lösung: Der konstante Term ist das Periodenmittel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-t}\,dt = \frac{1}{2\pi}(-e^{-2\pi}+1) = \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\,.$$

Der Koeffizienten a_k von $\cos kt$ für $k \geq 1$ sind $a_k = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos kt\,dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{-t}\cos kt\,dt\,.$

Nach den Hinweisen am Ende der Klausur hat $e^{-t}\cos kt$ die Stammfunktions

$$\frac{e^{-t}(-\cos kt + k\sin kt)}{k^2+1}\,,$$

also ist $a_k = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{e^{-2\pi}(-\cos 2k\pi + k\sin 2k\pi) - e^0(-\cos 0 + k\sin 0)}{k^2+1} = \dfrac{1-e^{-2\pi}}{\pi(k^2+1)}\,.$

Genauso lassen sich auch die $b_\ell = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin \ell t\,dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{-t}\sin \ell t\,dt$ berechnen: Hier haben wir die Stammfunktion $\frac{e^{-t}(-\sin \ell t - \ell\cos \ell t)}{\ell^2+1}$ und damit $b_\ell = \dfrac{(1-e^{-2\pi})\ell}{\pi(\ell^2+1)}\,.$

Die FOURIER-Reihe von f ergibt sich somit als

$$S_f(t) = \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi} + \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos kt}{k^2+1} + \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\sum_{\ell=1}^\infty \frac{\ell\sin \ell t}{\ell^2+1}\,.$$

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Lösung: An den Sprungstellen, d.h. den ganzzahligen Vielfachen von 2π. Dort konvergiert die Reihe gegen das Mittel aus links- und rechtsseitigen Grenzwert, d.h. gegen $\frac{1}{2}(1+e^{-2\pi})$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Ist die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$ stark abfallend?

Lösung: Nein, denn sie ist bei $t = 0$ nicht differenzierbar.

b) Berechnen Sie die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte von f!

Lösung: Die FOURIER-Transformierte ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_0^\infty e^{-t}e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(1+i\omega)t}\,dt = \left.\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{1+i\omega}\right|_0^\infty \\
&= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1+i\omega+1-i\omega}{1+\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2}\,.
\end{aligned}$$

Warnung: Auch wenn $e^{-|t|}$ eine gerade Funktion ist, kann man *nicht* argumentieren, daß $\widehat{f}(\omega)$ zweimal $\int_0^\infty e^t e^{-i\omega t}$ sei, den $e^{-i\omega t}$ ist *keine* gerade Funktion. Wenn man ausnutzen möchte, daß $f(t)$ gerade ist, muß man $e^{-i\omega t}$ in seinen (geraden) Realteil und (ungeraden) Imaginärteil zerlegen und erhält mittels der am Ende der Klausur angegebenen Formel für die Stammfunktion von $e^{at}\cos\omega t$

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\cos\omega t\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\sin\omega t\,dt \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-t}\cos\omega t = 2\cdot \left.\frac{e^{-t}(-\cos\omega t + \omega\sin\omega t)}{1+\omega^2}\right|_0^{\infty} = \frac{2}{1+\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Die LAPLACE-Transformierte ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^t e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{(1-s)t}\,dt = \left.\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s-1}$$

für $\Re s > 1$, da die Stammfunktion dann an der oberen Grenze verschwindet.

c) *ditto* für $f * f$!

Lösung: Da beide Transformationen Faltungen in Produkte überführen, ist das jeweils das Quadrat der in *a)* berechneten Funktionen, also $\dfrac{4}{(1+\omega^2)^2}$ *bzw.* $\dfrac{1}{(s-1)^2}$.

d) Was können Sie über die FOURIER- und LAPLACE-Transformierte von $g(t) = e^{-t}$ sagen?

Lösung: Die FOURIER-Transformierte existiert nicht, da das Integral für $t \to -\infty$ divergiert. Die LAPLACE-Transformierte hängt nur von den Funktionen im positiven Bereich ab und stimmt daher überein mit der oben berechnen LAPLACE-Transformierten von $e^{-|t|}$.

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Zur Berechnung des charakteristischen Polynoms entwickeln wir natürlich nach der dritten Zeile (oder Spalte):

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda)\big((1-\lambda)(5-\lambda)+4\big) = (7-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9) = (7-\lambda)(\lambda-3)^2\,.\end{aligned}$$

Somit hat A die Eigenwerte $\lambda = 3$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $\lambda = 7$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert drei werden von der Matrix $A-3E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ annulliert; wie deren erste und zweite Zeile zeigen, muß die zweite Komponente eines jeden Lösungsvektors gleich der negativen ersten sein, und aus der dritten Zeile, folgt daß die dritte Komponente verschwinden muß. Also wird der Eigenraum aufgespannt vom Vektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die geometrische Vielfachheit ist somit nur eins.

Auch ohne Rechnung sieht man, daß der Eigenraum zum Eigenwert sieben vom dritten Basisvektor erzeugt wird.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts drei ist nur eins, während sein algebraische Vielfachheit zwei ist.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

Lösung: Um eine Basis zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert drei. Da

$$(A - 3E)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$$

ist, kommen dafür alle von $\vec{v}_1$ linear unabhängige Vektoren mit dritter Komponente null in Frage, beispielsweise also der zweite Koordinateneinheitsvektor $\vec{v}_2$ des $\mathbb{R}^3$. Dies liefert eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren bestehend aus

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Dreiecksgestalt von A bezüglich dieser Basis zu berechnen, müssen wir noch wissen, wohin der Vektor $\vec{v}_2$ abgebildet wird und wie sich der Bildvektor in der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ darstellen läßt:

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 .$$

Da die Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ einfach mit dem zugehörigen Eigenwert multipliziert werden, ist die Dreiecksgestalt bezüglich der Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ somit $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir schreiben $\Delta = D + N$ mit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Da N den zweiten Basisvektor auf das (-2)-fache des ersten abbildet und diesen wiederum auf den Nullvektor, ist N^2 die Nullmatrix, und nach der allgemeinen Theorie kommutieren N und D, d.h.

$$e^{\Delta t} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix} (E + Nt)$$
$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & -2te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix}.$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ aussieht, brauchen wir die Inverse zur Matrix B des Basiswechsels; letztere hat die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ als Spalten, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wie man entweder sofort sieht (die lineare Abbildung mit Matrix B bildet den ersten Basisvektor ab auf die Differenz ersten minus zweiten Basisvektor, also muß die Umkehrabbildung den ersten Basisvektor abbilden auf seine *Summe* mit dem zweiten), oder aber stur nach Schema F aus dem GAUSS-Algorithmus erhält, indem man in

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

die erste Zeile zur zweiten addiert:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Somit ist $e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} e^{3t} & -2te^{3t} & 0 \\ 2te^{3t} & e^{3t} + 2t3e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{3t} & -2te^{3t} & 0 \\ 2te^{3t} & (1+2t)e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix}.$$

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = x(t) - 2y(t), \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + 5y(t), \quad \dot{z}(t) = 7z(t)$$

mit $x(0) = 1, y(0) = 0$ und $z(0) = -1$! Falls Sie Teil *d)* nicht lösen konnten, dürfen Sie hier auch mit der (völlig falschen) „Ersatzmatrix“ $e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{5t} - te^{5t} & 3te^{5t} & 0 \\ te^{5t} & 3te^{5t} + e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$ arbeiten.

Lösung: Da dies ein lineares Differentialgleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A ist, folgt aus der allgemeinen Theorie, daß es nur eine Lösung gibt, nämlich e^{At} mal dem Vektor der Anfangswerte, also

$$\begin{pmatrix} (1-2t)e^{3t} & -2te^{3t} & 0 \\ 2te^{3t} & (1+2t)e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{3t} \\ 2te^{3t} \\ -e^{7t} \end{pmatrix}.$$

Somit ist $x(t) = (1-2t)e^{3t}, \quad y(t) = 2te^{3t}$ und $z(t) = -e^{7t}$.

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \pm\infty$?

Lösung: e^{3t} und e^{7t} gehen für $t \to +\infty$ beide gegen unendlich und für $t \to -\infty$ gegen null. Durch Multiplikation mit t ändert sich daran nichts, also wächst die Lösung unbeschränkt für $t \to \infty$ und geht für $t \to -\infty$ gegen den Nullvektor.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 10y(t) = 50 \sin 4t$!

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 10y(t) = 0$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = (\lambda + 1)^2 + 9 = 0,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -1 \pm 3i$, und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y(t) = e^{-t}(a \cos 3t + b \sin 3t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können daher unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = c\cos 4t + d\sin 4t$. Dann ist

$$\dot{x}(t) = -4c\sin 4t + 4d\cos 4t \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -16c\cos 4t - 16d\sin 4t\,,$$

die Differentialgleichung führt also auf das lineare Gleichungssystem

$$-16c + 8d + 10c = -6c + 8d = 0 \quad \text{und} \quad -16d - 8c + 10d = -8c - 6d = 50\,.$$

Division durch (-2) liefert das etwas angenehmere System $3c - 4d = 0$ und $4c + 3d = -25$. Nach der ersten Gleichung ist $d = \frac{3}{4}c$ und nach der zweiten dann $(4 + \frac{9}{4})c = \frac{25}{4}c = -25$, d.h. $c = -4$ und $d = -3$. Die spezielle Lösung ist also $y(t) = -4\cos 4t - 3\sin 4t$, und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$x(t) = -4\cos 4t - 3\sin 4t + e^{-t}(a\cos 3t + b\sin 3t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \pm\infty$?

Lösung: Da e^{-t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = -4\cos 4t - 3\sin 4t$, also gegen eine reine Schwingung mit Periode 2π.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x, y) = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \le 8$!

Lösung: Für ein Extremum im Innern der Kreisscheibe muß der Gradient von f verschwinden, d.h.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat offensichtlich nur die Lösung $(-1, -1)$. Dort, wie auch in jedem anderen Punkt, ist die HESSE-Matrix von f gleich $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, also positiv definit. Somit hat f in $(-1, -1)$ ein Minimum, was natürlich auch so klar war, denn f nimmt nur nichtnegative Werte an und verschwindet genau in diesem Punkt. Weitere Extrema im Innern gibt es nicht.
Für Extrema auf dem Rand muß $\nabla f(x, y)$ linear abhängig vom Gradienten der Nebenbedingungsfunktion $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ sein; da dieser auf dem Rand nirgends verschwindet, muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ist $x = 0$ oder $y = 0$, kann es offensichtlich kein solches λ geben; andernfalls können wir durch x *bzw.* y dividieren und erhalten die Bedingung

$$\frac{x+1}{x} = \frac{y+1}{y} \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{1}{x} = \frac{1+1}{y} \quad \text{oder} \quad x = y\,.$$

Einsetzen in die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 8$ zeigt, daß dann $x = y = \pm 2$ sein muß. Da

$$f(2, 2) = 3^2 + 3^2 = 18 \quad \text{und} \quad f(-2, -2) = 1^2 + 1^2 = 2$$

ist, nimmt f also in $(2, 2)$ seinen Maximalwert auf dem Rand und damit auch auf der gesamten Menge an; in $(-2, -2)$ haben wir den Minimalwert auf dem Rand, der aber größer ist als das absolute Minimum.

Alternative Lösung: Die Funktion $f(x, y)$ ist das Quadrat des Abstands zwischen den Punkten (x, y) und $(-1, -1)$; sie ist genau dann maximal *bzw.* minimal, wenn dieser Abstand maximal *bzw.* minimal ist. Damit ist klar, daß das absolute Minimum bei $(-1, -1)$ liegt.

Die Extremwerte auf dem Rand sind die beiden Punkte der Kreislinie, die maximalen *bzw.* minimalen Abstand vom inneren Punkt $(-1, 1)$ des Kreises haben. Solche Punkte sind Lotfußpunkte, ihre Verbindungsgeraden zu $(-1, 1)$ stehen also senkrecht auf den Tangenten und gehen somit durch den Mittelpunkt des Kreises. Die Gerade durch demn Mittelpunkt $(0, 0)$ und $(-1, -1)$ ist die erste Winkelhalbierende $y = x$; sie schneidet in $(2, 2)$ und $(-2, 2)$, wobei $(2, 2)$ offensicht der weiter entfernte, also das Maximum ist.