Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

16. August 2006

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(t) = \sin(t+1)$!

2) Was ist $\operatorname{Res}_{z=1} \dfrac{\sin z}{z-1}$?

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 0 & i \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) *Richtig oder falsch:* $\sin t * \delta(t + x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$

5) Welche Ableitung im Distributionensinne hat die Funktion $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$? *(Es reicht, wenn Sie das Ergebnis mit Hilfe von* Dirac*-Distributionen angeben.)*

6) Ein Widerstand R soll nach dem Ohmschen Gesetz bestimmt werden, indem man verschiedene Spannungen anlegt und jeweils die Spannung U und die zugehörige Stromstärke I mißt, Der Fehler bei der Spannungsmessung sei ε, der Meßfehler für die Stromstärke sei δ. Mit welcher Genauigkeit ist dann $R = U/I$ bekannt?

7) Die Fourier-Transformierte von $f(t) = e^{-t^2}$ ist $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$. Welche Fourier-Transformierte hat $g(t) = te^{-t^2}$?

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie die Integrale $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$ und $I_2 = \displaystyle\int_{-1000}^{1000} \frac{x\,dx}{x^2+1}$!

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $0 \le t < 2\pi$ sei $f(t) = e^{-t}$.

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f !

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser Fourier-Reihe das Gibbs-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Ist die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$ stark abfallend?

b) Berechnen Sie die Fourier- und die Laplace-Transformierte von f !

c) *ditto* für $f * f$!

d) Was können Sie über die Fourier- und Laplace-Transformierte von $g(t) = e^{-t}$ sagen?

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = x(t) - 2y(t), \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + 5y(t), \quad \dot{z}(t) = 7z(t)$$

mit $x(0) = 1, y(0) = 0$ und $z(0) = -1$! Falls Sie Teil *d)* nicht lösen konnten, dürfen Sie hier auch mit der (völlig falschen) „Ersatzmatrix“ $e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{5t} - te^{5t} & 3te^{5t} & 0 \\ te^{5t} & 3te^{5t} + e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$ arbeiten.

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \pm\infty$?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 10y(t) = 50 \sin 4t$!

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \pm\infty$?

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x, y) = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 8$!

$\mathcal{HILFSMITTEL}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

$\mathcal{HINWEISE}$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\int e^{at} \sin \omega t \, dt = \frac{e^{at}(a \sin \omega t - \omega \cos \omega t)}{a^2 + \omega^2}, \qquad \int e^{at} \cos \omega t \, dt = \frac{e^{at}(a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{a^2 + \omega^2}$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Da ich bis zum 31. August weg bin, wird dies allerdings erst Anfang September geschehen.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •