WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

18. August 2006

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + z^2 = 0 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Lösung: *Richtig:* Für zwei reelle Zahlen x, z verschwindet $x^2 + z^2$ genau dann, wenn $x = z = 0$ ist, die Menge besteht also genau aus den Vielfachen des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, die natürlich einen Untervektorraum bilden.

2) Bestimmen Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{F}_2^3$, die das lineare Gleichungssystem $x + y = 0, \quad x + z = 1$ erfüllen!

Lösung: $x + y = 0$ ist für Elemente von $\mathbb{F}_2$ äquivalent zu $x = y$, und $x + z = 1$ gilt genau dann, wenn $x \neq z$ ist. Somit sind y und z durch x eindeutig bestimmt und wir erhalten für die beiden möglichen x-Werte die beiden Lösungen $(0, 0, 1)$ und $(1, 1, 0)$.

3) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei A^2 die Nullmatrix. Dann ist Rang $A \leq 1$.

Lösung: *Richtig,* denn sonst wäre Rang $A = 2$, d.h. A wäre invertierbar. Das Quadrat einer invertierbaren Matrix ist aber selbst invertierbar und kann damit unmöglich die Nullmatrix sein.

4) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda-1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda-1 \\ \lambda-2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda-1 \\ \lambda-2 \\ \lambda-3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda-1 \\ \lambda-2 \\ \lambda-3 \\ \lambda-4 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

Lösung: Die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix}$ mit diesen Vektoren als Spalten ist eine obere Dreiecksmatrix mit Determinante $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$. Die Vektoren sind somit genau dann linear abhängig, wenn $\lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist.

5) Richtig oder falsch: V sei ein HERMITEscher Vektorraum mit Produkt $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$. Dann definiert auch die Vorschrift $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{w} \cdot \vec{v}$ ein HERMITEsches Produkt auf V.

Lösung: *Falsch,* denn die Abbildung ist nicht linear im ersten Argument.

6) V sei ein EUKLIDischer Vektorraum, U sei ein Untervektorraum von V, und $\pi\colon V \to U$ sei die orthogonale Projektion von V auf U. Was ist Kern π ?

Lösung: Jeder Vektor $\vec{\in} V$ läßt sich als Summe $\vec{u}+\vec{w}$ schreiben mit $\vec{u} \in U$ und $\vec{w} \in U^{\perp}$; nach Definition ist $\pi(\vec{v}) = \vec{u}$. Somit ist $\operatorname{Kern}\pi = U^{\perp}$.

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x,y) = \sin(x+y^2)$ um den Nullpunkt!

Lösung: Wir kennen die TAYLOR-Reihen von $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Einsetzen von $z = x+y^2$ liefert $\sin(x+y^2) = (x+y)^2 - \frac{(x+y^2)^3}{3!} + \cdots$, wobei die weggelassenen Summanden nur Terme vom Grad mindestens fünf liefern. Ausmultiplzieren und Weglassen aller Terme von Grad größer vier führt somit auf

$$f(x,y) = x + y^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y^2}{2} + \cdots .$$

8) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{grad}\sin(x+y^2)$?

Lösung: Die Divergenz des Gradienten einer Funktion f ist der LAPLACE-Operator angewandt auf die Funktion, also

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x+y^2) - 4y^2\sin(x+y^2) + 2\cos(x+y^2)\,.$$

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

V sei der von $1, x, y, x+y, x^2, y^2, (x+y)^2$ und xy erzeugte Untervektorraum des Vektorraums aller Polynome in den beiden (voneinander unabhängigen) Variablen x und y.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: $x+y$ ist die Summe von x und y, und $(x+y)^2 = x^2+2xy = y^2$. Somit sind diese beiden Elemente nicht notwendig zur Erzeugung von V. Der Rest ist linear unabhängig, denn das Polynom $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ ist genau dann das Nullpolynom, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Somit bilden die Funktionen $1, x, y, x^2, xy, y^2$ eine Basis von V.

b) Welche Dimension hat V?

Lösung: Da wir eine Basis aus sechs Elementen haben, ist $\dim V = 6$.

c) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f \mapsto x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - 2f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

Lösung: Da Differentiation, Addition und Multiplikation mit einem festen Polynom lineare Operation sind, müssen wir nur zeigen, daß das Bild jeder Funktion aus V wieder in V liegt; dazu reicht es, eben wegen der Linearität, wenn wir dies für die Basiselemente nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= -2\\
\varphi(x) &= x\cdot 1 - 2x = -x\\
\varphi(y) &= y\cdot 1 - 2y = -y\\
\varphi(x^2) &= x\cdot 2x - 2x^2 = 0\\
\varphi(xy) &= x\cdot y + y\cdot x - 2xy = 0\\
\varphi(y^2) &= y\cdot 2y - 2y^2 = 0
\end{aligned}$$

Offensichtlich liegen alle in V.

d) Bestimmen Sie Kern und Bild von φ !

Lösung: Wie die Rechnung in *c)* zeigt, liegen die Basiselemente x^2, xy und y^2 im Kern, und damit auch ihr Erzeugnis. Die drei restlichen Basiselemente gehen auf linear unabhängige Bilder, so daß keine Linearkombination von ihnen im Kern liegen kann. Also ist Kern $\varphi = [x^2, xy, y^2]$.

Das Bild wird nach obiger Rechnung erzeugt von $-2, -x$ und $-y$; etwas übersichtlicher ausgedrückt ist also Bild $\varphi = [1, x, y]$.

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; da diese aus dem Ergebnis der obigen Rechnung direkt abgelesen werden können, läßt sich die Matrix direkt hinschreiben:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) W sei der Vektorraum aller Polynome in x vom Grad höchstens fünf, und ψ sei die lineare Abbildung $\begin{cases} V \to W \\ f(x,y) \mapsto f(x,x) \end{cases}$. Welche Dimensionen haben Kern und Bild von ψ ?

Lösung: Das Bild wir erzeugt von den Polynomen $\psi(1) = 1, \psi(x) = \psi(y) = x$ und $\psi(x^2) = \psi(xy) = \psi(y^2) = x^2$, ist also dreidimensional. Nach der Dimensionsformel ist damit auch

$$\dim \operatorname{Kern} \psi = \dim V - \dim \operatorname{Bild} \psi = 6 - 3 = 3\,.$$

(Eine Basis des Kern bilden beispielsweise die drei Polynome $x - y, x(x-y)$ und $y(x-y)$, aber danach war nicht gefragt.)

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_c$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + \;\; y + \qquad\qquad\quad z &= 1 && (1) \\ 2x + 4y + \qquad\qquad\quad z &= c + 2 && (2) \\ x - \;\; y + (c^2 - c + 2)z &= 0 && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$!

*Hinweis (**nur** zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Werte des Parameters c ist $z = 1/c$).*

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\begin{aligned} 2y - \qquad\qquad\quad z &= c && (4) \\ -2y + (c^2 - c + 1)z &= -1 && (5) \end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichung führt auf

$$(c^2 - c)z = c - 1\,.$$

Für $c = 0$ steht hier $0z = -1$; in diesem Fall ist das Gleichungssystem also unlösbar.

Für $c = 1$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die von jeder reellen Zahl $z = \lambda$ erfüllt wird.

Für $c \notin \{0,1\}$ schließlich können wir zunächst durch $c-1$ kürzen zu $cz = 1$ und dann durch c dividieren, was auf $z = \dfrac{1}{c}$ führt.
Nach Gleichung (4) ist $2y = z + c$, also

$$y = \frac{c+z}{2} = \begin{cases} \frac{1+\lambda}{2} & \text{für } c = 1 \\ \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) & \text{für } c \notin \{0,1\} \end{cases}.$$

Setzen wir dies in Gleichung (1) ein, erhalten wir

$$x = 1 - y - z = \begin{cases} 1 - \frac{1+\lambda}{2} - \lambda = \frac{1-3\lambda}{2} & \text{für } c = 1 \\ 1 - \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) - c = 1 - \frac{3}{2}c - \frac{1}{2c} & \text{für } c \notin \{0,1\} \end{cases}.$$

$$\text{Somit ist } \mathcal{L}_c = \begin{cases} \left\{\left(1 - \frac{3}{2}c - \frac{1}{2c}, \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right), \frac{1}{c}\right)\right\} & \text{für } c \notin \{0,1\} \\ \left\{\left(\frac{1-3\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, \lambda\right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } c = 1 \\ \emptyset & \text{für } c = 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!

Lösung: Bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms bietet sich Entwicklung nach der zweiten Zeile (oder Spalte) an:

$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(4-\lambda) + 2\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)\,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind somit $1, 2$ und 3.
Als Eigenvektor zum Eigenwert eins können wir natürlich einfach den zweiten Basisvektor nehmen, denn der wir ja durch Multiplikation mit der Matrix auf deren zweite Spalte, also sich selbst abgebildet.
Für den Eigenwert 2 erhalten wir $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; für einen Eigenvektor $\vec{v}_2$ zu 2 muß wegen $(A-2E)\vec{v}_2 = \vec{0}$ also die zweite Komponente verschwinden und zweimal die erste gleich der dritten sein. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 wird somit aufgespannt von $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ annuliert genau die Vektoren, deren zweite Komponente verschwindet, während die dritte gleich der ersten ist; der Eigenraum zum Eigenwert sechs wird also aufgespannt von $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Gibt es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A?

Lösung: Es gibt jedenfalls drei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten. Da wir noch nicht wissen, daß diese notwendigerweise linear unabhängig sind, müssen wir eine Linearkombination

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2\mu + \nu \\ \lambda \\ \mu + \nu \end{pmatrix}$$

betrachten. Wenn diese gleich dem Nullvektor ist, zeigt die zweite Komponente, daß λ verschwindet, und die Differenz von erster und dritter Komponente zeigt das Verschwinden von μ. Damit ist auch $\nu = 0$, die drei Vektoren sind also linear unabhängig und bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4: (*5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir wenden das GRAM-SCHMIDsche Orthogonalisierungsverfahren auf die drei Spaltenvektoren $\vec{a}_1 = \binom{0}{1}, \vec{a}_2 = \binom{2}{3}$ und $\vec{a}_3 = \binom{4}{5}$ an. $\vec{a}_1$ hat bereits die Länge eins, kann also als erster Vektor $\vec{q}_1$ sowohl einer Orthogonal- als auch einer Orthonormalbasis genommen werden.

Für den zweiten Vektor der Orthogonalbasis machen wir den Ansatz $\vec{c}_2 = \vec{a}_2 + \lambda\vec{q}_1$; die Bedingung $\vec{c}_2 \cdot \vec{q}_1 = 0$ führt auf

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + \lambda = 0\,,$$

d.h. $\lambda = -3$ und $\vec{c}_2 = a_2 - 3\vec{a}_1 = \binom{-1}{0}$. Dies könnten wir auch als Vektor der Orthonormalbasis nehmen, etwas schöner ist aber $\vec{q}_2 = \binom{1}{0}$.

$\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ bilden bereits eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$, wir brauchen also nach keinem weiteren Basisvektor zu suchen. Auch die Darstellung der $\vec{a}_i$ in dieser Basis ist völlig problemlos: Wir haben

$$\vec{a}_1 = \vec{q}_1\,, \quad \vec{a}_2 = 3\vec{q}_1 + 2\vec{q}_2 \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 = 5\vec{q}_1 + 4\vec{q}_2\,.$$

Somit ist

$$A = QR \quad \text{mit} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

b) Welchen Rang hat A?

Lösung: Da A nur zwei Zeilen hat, kann es höchstens Rang zwei haben; da die ersten beiden Spalten offensichtlich (oder nach *a)*) linear unabhängig sind, hat es auch diesen Rang.

Aufgabe 5: (*6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x + y + \sin(x+y) + 2\cos(x-y) \end{cases}!$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von SCHWARZ anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 1 + \cos(x+y) - 2\sin(x-y) \\ f_y(x,y) &= 1 + \cos(x+y) + 2\sin(x-y) \\ f_{xx}(x,y) &= -\sin(x+y) - 2\cos(x-y) \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -\sin(x+y) + 2\cos(x-y) \\ f_{yy}(x,y) &= -\sin(x+y) - 2\cos(x-y) \end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1+\cos(x+y) - 2\sin(x-y) \\ 1+\cos(x+y) + 2\sin(x-y) \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+y) - 2\cos(x-y) & -\sin(x+y) + 2\cos(x-y) \\ -\sin(x+y) + 2\cos(x-y) & -\sin(x+y) - 2\cos(x-y) \end{pmatrix} .$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} e^{x+y} + \sin xy \\ e^{x-y} - \cos xy \end{pmatrix} \end{cases} !$$

Lösung: Die erste Komponente $e^{x+y} + \sin xy$ von $\vec{V}$ hat nach der Kettenregel die partiellen Ableitungen

$$e^{x+y} + y\cos xy \quad \text{und} \quad e^{x+y} + x\cos xy ;$$

für die zweite Komponente $e^{x-y} - \cos xy$ erhalten wir entsprechend

$$e^{x-y} + y\sin xy \quad \text{und} \quad -e^{x-y} + x\sin xy .$$

Also ist

$$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + y\cos xy & e^{x+y} + x\cos xy \\ e^{x-y} + y\sin xy & -e^{x-y} + x\sin xy \end{pmatrix} .$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = e^{x+y} - e^{x-y} + y\cos xy + x\sin xy .$$