

18. August 2006

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: (je zwei Punkte)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Richtig oder falsch: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 0 \right\}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 .
- 2) Bestimmen Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{F}_2^3$, die das lineare Gleichungssystem $x + y = 0$, $x + z = 1$ erfüllen!
- 3) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sei A^2 die Nullmatrix. Dann ist $\text{Rang } A \leq 1$.
- 4) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda - 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda - 2 \\ \lambda - 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda - 2 \\ \lambda - 3 \\ \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

- 5) Richtig oder falsch: V sei ein HERMITESCHER Vektorraum mit Produkt $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$. Dann definiert auch die Vorschrift $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{w} \cdot \vec{v}$ ein HERMITESCHES Produkt auf V .
- 6) V sei ein EUKLIDISCHER Vektorraum, U sei ein Untervektorraum von V , und $\pi: V \rightarrow U$ sei die orthogonale Projektion von V auf U . Was ist Kern π ?
- 7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ um den Nullpunkt!
- 8) Was ist $\text{div grad } \sin(x + y^2)$?

Aufgabe 1: (9 Punkte)

V sei der von $1, x, y, x + y, x^2, y^2, (x + y)^2$ und xy erzeugte Untervektorraum des Vektorraums aller Polynome in den beiden (voneinander unabhängigen) Variablen x und y .

- a) Finden Sie eine Basis \mathcal{B} von V !
- b) Welche Dimension hat V ?
- c) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f \mapsto x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - 2f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$.
- d) Bestimmen Sie Kern und Bild von φ !
- e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in a) gefundenen Basis!
- f) W sei der Vektorraum aller Polynome in x vom Grad höchstens fünf, und ψ sei die lineare Abbildung $\begin{cases} V \rightarrow W \\ f(x, y) \mapsto f(x, x) \end{cases}$. Welche Dimensionen haben Kern und Bild von ψ ?

• • • Bitte wenden! • • •

Aufgabe 2: (8 Punkte)Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathcal{L}_c des linearen Gleichungssystems

$$x + y + z = 1 \quad (1)$$

$$2x + 4y + z = c + 2 \quad (2)$$

$$x - y + (c^2 - c + 2)z = 0 \quad (3)$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$!*Hinweis (nur zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Werte des Parameters c ist $z = 1/c$.***Aufgabe 3: (6 Punkte)**

- a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!
- b) Gibt es eine Basis des \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A ?

Aufgabe 4: (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$!
- b) Welchen Rang hat A ?

Aufgabe 5: (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y + \sin(x + y) + 2 \cos(x - y) \end{cases} !$$

- b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} e^{x+y} + \sin xy \\ e^{x-y} - \cos xy \end{pmatrix} \end{cases} !$$

H I L F S M I T T E L

Als Hilfsmittel sind nur Taschenrechner ohne
höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Dies wird frühestens Anfang September der Fall sein.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

• • •

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?

• • •