Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

15. Juli 2006

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller stetig differenzierbarer Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = f'(1)$ ist ein Vektorraum.

Lösung: *Richtig;* M ist eine Teilmenge des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetig differenzierbarer Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sie enthält die Nullfunktion und für $f, g \in M$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda f'(1) + \mu g'(1) = (\lambda f + \mu g)'(1)$, so daß auch $\lambda f + \mu g$ in M liegt.

2) Welche Dimension hat der von $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ aufgespannte Untervektorraum $U \le \mathbb{R}^3$?

Lösung: Offensichtlich kann er auch aufgespannt werden von $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Diese sind nicht proportional zueinander, also linear unabhängig, und bilden daher eine Basis. Somit ist $\dim U = 2$.

3) Geben Sie die Vektoren aus $E = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \;\middle|\; xy = x + z \right\}$ explizit an, und entscheiden Sie, ob E ein Untervektorraum ist!

Lösung: Auflösen nach z führt auf die Gleichung $z = xy - x$, also enthält E die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

E ist kein Untervektorraum, denn die Summe des zweiten und des dritten dieser Vektoren liegt nicht in E.

4) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse zu 1000 im Körper $\mathbb{F}_{1009}$!

Lösung: Wir müssen den erweiterten Euklidischen Algorithmus anwenden auf 1009 und 1000:

$$1009 : 1000 = 1 \text{ Rest } 9 \Longrightarrow 9 = 1009 - 1000$$
$$1000 : 9 = 111 \text{ Rest } 1 \Longrightarrow 1 = 1000 - 111 \cdot 9 = 112 \cdot 1000 - 111 \cdot 1009$$

Somit ist $112 \cdot 1000 \equiv 1 \bmod 1009$, d.h. in $\mathbb{F}_{1009}$ ist $\frac{1}{1000} = 112$.

5) Was ist $\det \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Lösung: Durch Zeilenvertauschungen läßt sich die Matrix leicht auf die Dreiecksgestalt

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

bringen; deren Determinante ist das Produkt der Diagonalelemente, also $6! = 720$. Um die letzte Zeile an zweite Position zu bringen, können wir sie beispielsweise viermal hintereinander mit der jeweils darüberstehenden Zeile vertauschen; danach muß nur noch die letzte Zeile der entstandenen Matrix (mit 3 als erstem Element $\neq 0$) zwei Positionen nach oben geschoben werden, was zwei Vertauschungen benötigt. Insgesamt haben wir also eine gerade Anzahl von Vertauschungen; die gesuchte Determinante ist somit gleich -720.

6) Die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien die Parabeln $x^2 = ay$ jeweils ohne den Nullpunkt, und $N_0(f)$ sei die Vereinigungsmenge von x-Achse und y-Achse. Was ist $f(x,y)$?

Lösung: Für $xy \neq 0$ führt die Beziehung $f(x,y) = a \iff x^2 = ay$ sofort auf $f(x,y) = x^2/y$. Offensichtlich liefert diese Formel auch für $x = 0$ und $y \neq 0$ den richtigen Funktionswert, also ist

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2/y & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}.$$

7) *Richtig oder falsch:* Wenn für ein Vektorfeld $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ in einem Punkt $x \in D$ die JACOBI-Matrix antisymmetrisch ist, verschwindet dort die Divergenz von $\vec{V}$.

Lösung: *Richtig,* denn wegen ${}^tA = -A$ müssen alle Diagonaleinträge einer antisymmetrischen Matrix verschwinden, insbesondere also auch deren Summe, die Spur der Matrix. Im Falle der JACOBI-Matrix ist diese Spur aber gerade die Divergenz des Vektorfelds.

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
$V \leq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei der von den Funktionen $e^x, e^x \sin x, e^x \sin^2 x, e^x \cos x$ und $e^x \cos^2 x$ erzeugte Untervektorraum.

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Nach Definition von V kann jedes Element als Linearkombination der fünf Funktionen

$$e^x, e^x \sin x, e^x \sin^2 x, e^x \cos x \quad \text{und} \quad e^x \cos^2 x$$

geschrieben werden. Nun ist aber

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff e^x \sin^2 x + e^x \cos^2 x = e^x,$$

so daß eine der drei Funktionen $e^x, e^x \sin^2 x$ und $e^x \cos^2 x$ überflüssig ist. V wird also bereits von den vier Funktionen

$$e^x, e^x \sin x, e^x \cos x \quad \text{und} \quad e^x \sin^2 x$$

erzeugt. Diese sind linear unabhängig, denn ist für reelle Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$ae^x + be^x \sin x + ce^x \cos x + de^x \sin^2 x = 0\,,$$

so ist auch

$$a + b \sin x + c \cos x + d \sin^2 x = 0\,,$$

da wir durch den nirgendwo verschwindenden Faktor e^x dividieren können. Einsetzen von $x = 0$ zeigt, daß $a + c$ verschwindet; $x = \pi$ führt entsprechend auf $a - c = 0$. Also ist $a = c = 0$, und damit muß auch $b = d = 0$ sein, denn sonst wären $\sin x$ und $\sin^2 x$ proportional zueinander, obwohl die eine Funktion Periode 2π hat, die andere nur Periode π. (Alternativ: $\sin^2 x$ nimmt nur positive Werte an, $\sin x$ auch negative.)
Somit können wir als Basis von V das System $\mathcal{B} = (e^x, e^x \sin x, e^x \cos x, e^x \sin^2 x)$ nehmen.

b) Welche Dimension hat V?

Lösung: Da wir eine Basis aus vier Elementen gefunden haben, ist die Dimension natürlich gleich vier.

c) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\varphi(f) = f'' - 2f' + 2f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$!

Lösung: Da Differentiation eine lineare Operation ist und $\varphi(f)$ eine Linearkombination von Ableitungen, ist klar, daß φ eine lineare Abbildung $V \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert. Wir müssen uns überlegen, daß das Bild in V liegt.
Dazu reicht es, die Bilder der Basisvektoren zu betrachten, die wir nachher in *e)* ohnehin brauchen. Wir erhalten

f	f'	f''	$\varphi(f)$
e^x	e^x	e^x	e^x
$e^x \sin x$	$e^x \sin x + e^x \cos x$	$2e^x \cos x$	0
$e^x \cos x$	$-e^x \sin x + e^x \cos x$	$-2e^x \sin x$	0
$e^x \sin^2 x$	$2e^x \sin x \cos x + e^x \sin^2 x$	$4e^x \sin x \cos x + 2e^x - 3e^x \sin^2 x$	$2e^x - 3e^x \sin^2 x$

Somit liegt $\varphi(f)$ für alle vier Basiselemente wieder in V und φ definiert in der Tat eine lineare Abbildung $V \to V$.

d) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ?

Lösung: Das Element $ae^x + be^x \sin x + ce^x \cos x + de^x \sin^2 x$ wird abgebildet auf

$$ae^x + d(2e^x - 3e^x \sin^2 x) = (a + 2d)e^x - 3de^x \sin^2 x\,.$$

Dies verschwindet offensichtlich genau dann, wenn $d = 0$ und $a = 0$ ist; der Kern wird also erzeugt von $e^x \cos x$ und $e^x \sin x$ und ist zweidimensional. Wie die Dimensionsformel

$$\dim \text{Bild}\,\varphi = \dim V - \dim \text{Kern}\,\varphi = 4 - 2 = 2$$

zeigt, hat das Bild dieselbe Dimension, und in der Tat sieht man sofort, daß e^x und $e^x \sin^2 x$ eine Basis von Bild φ bilden.

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis $\mathcal{B}$!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Basisdarstellung der Bilder der Basisvektoren; letztere kennen wir aus *c)* und erhalten die Abbildungsmatrix daher sofort als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrl} w - x + y - 2z &=& 1 & (1) \\ w - 2x - z &=& -2 & (2) \\ 2w - 3x + 3y - 5z &=& 1 & (3) \\ -w + 3x - 2y + (a^2-1)z &=& a & (4) \end{array}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a+2}$.
Beachten Sie die Minuszeichen vor den meisten z-Termen!

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzten drei Gleichungen subtrahieren wir die erste Gleichung einmal von der zweiten, zweimal von der dritten und addieren sie einmal zur vierten:

$$\begin{array}{rcll} -x - y + z &=& -3 & (5) \\ -x + y - z &=& -1 & (6) \\ 2x - y + (a^2-3)z &=& a+1 & (7) \end{array}$$

Als nächstes soll x aus den Gleichungen (6) und (7) eliminiert werden; dazu subtrahieren wir Gleichung (5) von (6) und addieren sie zweifach zu (7):

$$\begin{array}{rcll} 2y - 2z &=& 2 & (8) \\ -3y + (a^2-1)z &=& a-5 & (9) \end{array}$$

Gleichung (8) ersetzen wir natürlich sofort durch $y - z = 1$ und addieren sie in dieser Form dreimal zu (9); wir erhalten $(a^2-4)z = a-2$.
Für $a = -2$ ist das die unlösbare Gleichung $0z = -4$, für $a = 2$ die tautologische Gleichung $0z = 0$, die erfüllt ist wann immer wir für z irgendeine reelle Zahl λ einsetzen. Ansonsten erhalten wir

$$z = \frac{1}{a+2}.$$

Wegen $y - z = 1$ ist dann $y = 1 + z = \begin{cases} \dfrac{a+3}{a+2} & \text{falls } a \neq \pm 2 \\ 1+\lambda & \text{falls } a = 2 \end{cases}$.
Einsetzen von $y - z = 1$ in Gleichung 6 zeigt, daß im lösbaren Fall stets $x = 2$ ist, und Gleichung (1) liefert uns schließlich

$$w = 1 + x - y + 2z = 3 - 1 + z = 2 + z = \begin{cases} \dfrac{2a+5}{a+2} & \text{falls } a \neq \pm 2 \\ 2+\lambda & \text{falls } a = 2 \end{cases}.$$

Die Lösungsmenge ist daher

$$\mathcal{L}_a = \left\{\left(\frac{2a+5}{a+2}, 2, \frac{a+3}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\} \quad \text{für } a \neq \pm 2,$$
$$\mathcal{L}_2 = \{(2+\lambda, 2, 1+\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{-2} = \emptyset.$$

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\2\\4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3\\4\\0\\5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1\\-2\\3\\6 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums U von $\mathbb{R}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis dieses Untervektorraums. Als ersten Vektor können wir $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$ wählen; wegen

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

ist der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis $\vec{q}_1 = \frac{1}{5}\vec{v}_1$.

Für den zweiten Vektor der Orthogonalbasis machen wir den Ansatz $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + \lambda\vec{b}_1$, wobei λ so gewählt werden muß, daß $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$ ist. Da

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -3 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 25$$

gleich dem Quadrat der Länge von $\vec{v}_1$ ist, folgt $\lambda = -1$ und $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4\\2\\-2\\1 \end{pmatrix}$.

Auch dieser Vektor hat die Länge fünf, der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{q}_2 = \frac{1}{5}\vec{b}_2$.

Für den noch fehlenden dritten Vektor der Orthogonalbasis ist der Ansatz entsprechend:

$$\vec{b}_3 = \vec{v}_3 + \lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = 0\,.$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_3 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (-1 - 4 + 6 + 24) + 25\lambda \Longrightarrow \lambda = -1$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = (4 - 4 - 6 + 6) + 25\mu \Longrightarrow \mu = 0$$

$$\vec{b}_3 = \vec{v}_3 - \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2\\-4\\1\\2 \end{pmatrix}.$$

Auch dieser Vektor hat die Länge fünf; als Orthonormalbasis können wir also die drei Vektoren $\vec{q}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1\\2\\2\\4 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4\\2\\-2\\1 \end{pmatrix}$ und $\vec{q}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2\\-4\\1\\2 \end{pmatrix}$ nehmen.

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0\\5\\0\\0 \end{pmatrix}$ auf U !

Lösung: Ist $\vec{q}_4$ irgendein Vektor aus $\mathbb{R}^4$, der zusammen mit $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$ eine Orthonormalbasis bildet, so läßt sich jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ schreiben als

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{q}_1)\vec{q}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_2)\vec{q}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_3)\vec{q}_3 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_4)\vec{q}_4\,;$$

seine orthogonale Projektion nach U ist die Summe der ersten drei Summanden der rechten Seite, die nach $U^\perp$ ist der letzte Summand. Die gesuchte Projektion ist somit

$$\frac{10}{5}\vec{q}_1 + \frac{10}{5}\vec{q}_2 - \frac{20}{5}\vec{q}_3 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1\\2\\2\\4 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -4\\2\\-2\\1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -2\\-4\\1\\2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\\24\\-4\\2 \end{pmatrix}.$$

c) Ergänzen Sie die in *a)* gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$. *(Hinweis: Sie können z.B. b) verwenden.)*

Lösung: Die orthogonale Projektion von $\vec{a}$ nach $U^\perp$ ergibt zusammen mit der orthogonalen Projektion nach U den Vektor $\vec{a}$; da wir letztere kennen, können wir erstere ausrechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 24 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf U, also insbesondere auf $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$, und er hat die Länge eins. Daher können wir ihn als vierten Vektor der Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ nehmen.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Ein Himmelskörper bewegt sich auf einer elliptischen Bahn mit Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Zur Bestimmung der beiden Halbachsen a, b wurde seine Position (x, y) zu verschiedenen Zeiten gemessen, allerdings sind die Datenpaare $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, N$ natürlich fehlerbehaftet. Wie könne Sie die bestmöglichen Schätzungen für a, b aus den x_i und y_i berechnen? (Sie müssen keine explizite Formel angeben; es reicht den Rechengang zu beschreiben.)

Lösung: Um Gleichungen zu bekommen, die linear in den gesuchten Parametern sind, setzen wir $\alpha = \frac{1}{a^2}$ und $\beta = \frac{1}{b^2}$; dann sollten idealerweise die N Gleichungen $x_i^2\alpha + y_i^2\beta = 1$ gelten. Ist A die Matrix mit den N Zeilen x_i^2, y_i^2 und $\vec{1} \in \mathbb{R}^N$ der Vektor, dessen sämtliche Komponenten gleich eins sind, so sollte also gelten

$$A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{1}.$$

Bei fehlerbehafteten Daten wird dieses Gleichungssystem fast sicher unlösbar sein; Multiplikation mit ${}^tA$ macht daraus

$${}^tAA\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = {}^tA\vec{1} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^4 & \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i^2 \\ \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i^2 & \sum_{i=1}^N y_i^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 \\ \sum_{i=1}^N y_i^2 \end{pmatrix}.$$

Diese lineare Gleichungssystem hat, falls die x_i^2 nicht perfekt proportional zu den y_i^2 sind, eine eindeutige Lösung $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Falls α und β positiv sind, können wir

$$a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

setzen; falls nicht, sollten wir zunächst auf Rechenfehler überprüfen und uns dann überlegen, ob es sich nicht vielleicht doch um eine Hyperbelbahn handeln könnte.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$!

Lösung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen von

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 0\\ 6 & 4-\lambda & 2\\ -6 & -3 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1\\ -6 & -3\end{vmatrix}+(-3-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1\\ 6 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-2(3+3\lambda-6)-(\lambda+3)\big((\lambda-4)(\lambda+1)+6\big)$$
$$=6-6\lambda-(\lambda+3)(\lambda^2-3\lambda+2)=-\lambda^3+\lambda=\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)\,.$$

(Entwicklung nach der dritten Spalte.) Die Eigenwerte sind somit $0, 1$ und -1.
Die Eigenvektoren zu $\lambda_1=0$ erfüllen das lineare Gleichungssystem $A\vec{v}=\vec{0}$ oder

$$-x-y=0,\qquad 6x+4y+2z=0\quad\text{und}\quad -6x-3y-3z=0\,.$$

Die erste Gleichung besagt, daß $y=-x$ sein muß; die beiden anderen werden, wenn man dies einsetzt, äquivalent zu $z=-x$. Der Eigenraum wir also erzeugt von $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_2=1$ erfüllen das lineare Gleichungssystem $(A-E)\vec{v}=\vec{0}$ oder

$$-2x-y=0,\qquad 6x+3y+2z=0\qquad -6x-3y-4z=0\,;$$

also muß $y=-2x$ und $z=0$ sein. Die Eigenvektoren zu $\lambda_2=1$ sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_3=-1$ erfüllen das lineare Gleichungssystem $(A+E)\vec{v}=\vec{0}$ oder

$$y=0,\qquad 6x+5y+2z=0\quad\text{und}\quad -6x-3y-2z=0\,.$$

Hier muß offensichtlich $z=-3x$ sein; die gesuchten Eigenvektoren sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$.

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat?

Lösung: Ja, z.B. $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$. Diese Vektoren sind linear unabhängig, denn

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+\mu+\nu\\-\lambda-2\mu\\-\lambda-3\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

hat offensichtlich keine nichttriviale Lösung. (Setze $\mu=-\frac{1}{2}\lambda$ und $\nu=-\frac{1}{3}\lambda$ ein in die erste Zeile.)

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
$\vec{V}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ sei ein Vektorfeld. Berechnen Sie $\operatorname{grad}(\vec{V}\cdot\vec{V})$!

Lösung: Sind $V_1,\dots,V_n$ die Komponenten von $\vec{V}$, so ist

$$\vec{V}\cdot\vec{V}=V_1^2+\cdots+V_n^2\quad\text{und}\quad\frac{\partial\vec{V}\cdot\vec{V}}{\partial x_i}=2\left(V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_i}+\cdots+V_n\frac{\partial V_n}{\partial x_i}\right),$$

$$\text{also}\qquad\operatorname{grad}(\vec{V}\cdot\vec{V})=2\begin{pmatrix}V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\cdots+V_n\frac{\partial V_n}{\partial x_1}\\ \vdots\\ V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_n}+\cdots+V_n\frac{\partial V_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^x \cos y + y \sin^2 x \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

Lösung: Die Funktion ist offensichtlich mindestens zweimal stetig differenzierbar (sie ist sogar analytisch); es reicht also, die partiellen Ableitungen zu berechnen. Für den Gradienten bekommen wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^x \cos y + 2y \sin x \cos x \\ f_y(x,y) &= -e^x \sin y + \sin^2 x \\ \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} e^x \cos y + 2y \sin x \cos x \\ -e^x \sin y + \sin^2 x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die HESSE-Matrix können wir aus dem SCHWARZschen Lemma folgern, daß $f_{xy} = f_{yx}$ ist, wir müssen also nur eine der beiden gemischten Ableitungen berechnen.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= e^x \cos y + 2y \cos^2 x - 2y \sin^2 x = e^x \cos y + 4y \cos^2 x - 2y \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = -e^x \sin y + 2 \sin x \cos x \\ f_{yy}(x,y) &= -e^x \cos y \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(x,y)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y + 4y \cos^2 x - 2y & 2 \sin x \cos x - e^x \sin y \\ 2 \sin x \cos x - e^x \sin y & -e^x \cos y \end{pmatrix} .$$