Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

15. Juli 2006

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller stetig differenzierbarer Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = f'(1)$ ist ein Vektorraum.

2) Welche Dimension hat der von $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ aufgespannte Untervektorraum $U \le \mathbb{R}^3$?

3) Geben Sie die Vektoren aus $E = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \;\middle|\; xy = x + z \right\}$ explizit an, und entscheiden Sie, ob E ein Untervektorraum ist!

4) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse zu 1000 im Körper $\mathbb{F}_{1009}$!

5) Was ist $\det \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

6) Die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien die Parabeln $x^2 = ay$ jeweils ohne den Nullpunkt, und $N_0(f)$ sei die Vereinigungsmenge von x-Achse und y-Achse. Was ist $f(x, y)$?

7) *Richtig oder falsch:* Wenn für ein Vektorfeld $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ in einem Punkt $x \in D$ die Jacobi-Matrix antisymmetrisch ist, verschwindet dort die Divergenz von $\vec{V}$.

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
$V \le \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei der von den Funktionen $e^x, e^x \sin x, e^x \sin^2 x, e^x \cos x$ und $e^x \cos^2 x$ erzeugte Untervektorraum.

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

b) Welche Dimension hat V?

c) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\varphi(f) = f'' - 2f' + 2f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi: V \to V$!

d) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis $\mathcal{B}$!

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcll} w - x + y - 2z &=& 1 & (1)\\ w - 2x - z &=& -2 & (2)\\ 2w - 3x + 3y - 5z &=& 1 & (3)\\ -w + 3x - 2y + (a^2-1)z &=& a & (4) \end{array}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a+2}$.
Beachten Sie die Minuszeichen vor den meisten z-Termen!

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-3\\4\\0\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\6\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums U von $\mathbb{R}^4$!

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\end{pmatrix}$ auf U!

c) Ergänzen Sie die in *a)* gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$. *(Hinweis: Sie können z.B. b) verwenden.)*

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)
Ein Himmelskörper bewegt sich auf einer elliptischen Bahn mit Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Zur Bestimmung der beiden Halbachsen a, b wurde seine Position (x, y) zu verschiedenen Zeiten gemessen, allerdings sind die Datenpaare $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, N$ natürlich fehlerbehaftet. Wie könne Sie die bestmöglichen Schätzungen für a, b aus den x_i und y_i berechnen? (Sie müssen keine explizite Formel angeben; es reicht den Rechengang zu beschreiben.)

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 6 & 4 & 2\\ -6 & -3 & -3\end{pmatrix}$!

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat?

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)
$\vec{V} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei ein Vektorfeld. Berechnen Sie $\operatorname{grad}(\vec{V} \cdot \vec{V})$!

Aufgabe 7: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^x \cos y + y \sin^2 x \end{cases}$ Gradient und Hesse-Matrix!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 15. Juli 2006, um 13^{00} Uhr