Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
*Tel.* 2515

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 19. Juli 2006

*a)* Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ hänge, in Polarkoordinaten $(r,\varphi)$ geschrieben, nur ab von $\varphi$. Wie sehen die Niveaulinien von $f$ aus?

*b)* Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ hänge, in Kugelkoordinaten $(r,\varphi,\vartheta)$ geschrieben, nur ab von $\vartheta$. Wie sehen die Niveauflächen von $f$ aus?

*c)* Das Vektorfeld $\vec{V}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ordne dem Punkt mit Polarkoordinaten $(r,\varphi)$ den Vektor $\binom{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ aus $\mathbb{R}^2$ zu. Zeigen Sie, daß dieser Vektor in jedem Punkt $(x,y)$ senkrecht auf dem Ortsvektor $\binom{x}{y}$ steht!

*d)* Bestimmen Sie durch Übergang zu Polarkoordinaten alle relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = \cos(x^2+y^2) + \sin(x^2+y^2)$ !

*e)* Lösen Sie Aufgabe 2*b)* des elften Übungsblatt mit Hilfe von Polarkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\Delta \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n}$, $\quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$ für beliebiges $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und zeigen Sie, daß dies genau für $n = \frac{1}{2}$ verschwindet!

*f)* Versuchen Sie, den Graphen der Betragsfunktion zwischen $x = -3$ und $x = 3$ durch ein Kurvenstück oder durch eine Kurve zu beschreiben!

*g)* Die Kurve $\gamma\colon [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\gamma(t) = \big((5+t/4\pi)\cos t, (5+t/4\pi)\sin t, t/2\pi\big)$. Beschreiben Sie diese Kurve geometrisch (Die Verwendung von Begriffen wie *Sinus* oder *Cosinus* ist dabei verboten!) und bestimmen Sie ihre Bogenlänge!

*h)* Berechnen Sie die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den beiden Punkten $(0,0)$ und $(2,4)$ !

*i)* Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \cosh x$ über dem Intervall $[-c,c]$ !

*j)* Das Vektorfeld $\vec{V}$ sei gegeben durch $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Wege $\gamma_i\colon [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3$ durch
$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad \gamma_2(t) = (1,0,t) \text{ und } \gamma_3(t) = \begin{cases} (\cos 2t, \sin 2t, 0) & \text{falls } t \le 10\pi \\ (1,0,2(t-10\pi)) & \text{falls } t \ge 10\pi \end{cases}.$$
Berechnen Sie die Integrale von $\vec{V}$ längs der $\gamma_i$! Ist das Vektorfeld $\vec{V}$ konservativ?

*k)* Betrachten Sie die Raute $R$ mit Ecken $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,2)$ und $(0,-2)$ als Normalbereich und berechnen Sie ihren Flächeninhalt sowie die Integrale
$$I_1 = \iint_R x\,dx\,dy, \quad I_2 = \iint_R xy\,dx\,dy \quad \text{und} \quad I_3 = \iint_R x^2\,dx\,dy\,!$$

*l)* Berechnen Sie für $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2 \le 1\big\}$ die Integrale
$$J_1 = \iint_K dx\,dy, \qquad J_2 = \iint_K \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy \quad \text{und} \quad J_3 = \iint_K \big(1-\sqrt{x^2+y^2}\big)\,dx\,dy\,!$$
Wie lassen sich diese geometrisch interpretieren?

*m)* Zeigen Sie das Cavalierische Prinzip: Eine um die $z$-Achse rotationssymmetrische Figur, die in Höhe $z$ den Radius $r(z)$ hat, hat zwischen den Höhen $z = z_1$ und $z = z_2$ das Volumen $V = \pi \int_{z_1}^{z_2} r(z)^2\,dz$.

*n)* Ein Bierglas habe oberhalb seines Stiels die Form einer um die Mittelachse rotierenden Parabel $z = x^2$. Wie hoch über dem Scheitelpunkt der Parabel sitzt der Eichstrich für einen halben Liter?

*o)* *Ditto* für die um die $z$-Achse rotierende Kurve $z = e^{x/5} - 1$. (Der Zahlenwert kann hier nur numerisch bestimmt werden; es reicht also, wenn Sie eine Gleichung dafür finden.)