Wolfgang K. Seiler | A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12. Juli 2006

Natürlich sind gerade diese Woche mehr noch als sonst auch alle früheren Themenvorschläge und Übungsblätter relevant, eventuell auch die Schein- und Vordiplomsklausuren vergangener Jahre. Trotzdem folgen hier noch wenigstens ein paar Themenvorschläge zum Vorlesungsstoff dieser Woche

a) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die Jacobi-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lösung: *Richtig,* denn da jede der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ identisch verschwindet, ist jede Komponente f_i von f undabhängig von jeder der Variablen x_j.

b) *Richtig oder falsch:* Wenn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine Taylor-Reihe darstellbar.

Lösung: *Falsch;* das klassische Gegenbeispiel für $n = 1$, die Funktion $f(x) = e^{-1/x^2}$ mit $f(0) = 0$ läßt sich leicht ausbauen zu einer Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, z.B. zu

$$f(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{-1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}, \quad f(0, \dots, 0) = 0 .$$

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix des Vektorfelds

$$(x, y, z) \mapsto \vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ yz + xz + xy \\ xyz \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^3$!

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y + z & x + z & x + y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

d) Bestimmen Sie Divergenz und Rotation von $\vec{V}$!

Lösung: Die Divergenz ist die Spur der Jacobi-Matrix, d.h.

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = 1 + x + z + xy .$$

Einsetzen in die definierende Formel zeigt, daß

$$\operatorname{rot} \vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz - x - z \\ 1 - yz \\ y + z - 1 \end{pmatrix} .$$

e) *ditto* für $\vec{W}\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3;\quad \vec{v} \mapsto \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$!

Lösung: In Koordinaten ist

$$\vec{W}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Aus Quotientenregel und Kettenregel folgt, daß

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

ist; entsprechend die partiellen Ableitungen nach y, z. Somit ist

$$\operatorname{div} \vec{W}(x,y,z) = \frac{(y^2+z^2)+(x^2+z^2)+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} .$$

Bei der Berechnung der Rotation heben sich alle Terme weg, d.h. $\operatorname{rot} \vec{W}(x,y,z) = 0$.

f) Was sind die Divergenz und die Rotation der linearen Funktion

$$\vec{L}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3z \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z \end{pmatrix} ?$$

Lösung: $\operatorname{div} \vec{L}(x,y,z) = a_1 + b_2 + c_3$ und $\operatorname{rot} \vec{L}(x,y,z) = \begin{pmatrix} c_2 - b_3 \\ a_3 - c_1 \\ b_1 - a_2 \end{pmatrix}$.

g) Berechnen Sie $\operatorname{div} \operatorname{grad} e^{-(x^2+y^2+z^2)}$!

Lösung:

$$\frac{\partial e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\partial x^2} = (4x^2-2x)e^{-(x^2+y^2+z^2)} ,$$

entsprechend für die Ableitungen nach den anderen Variablen. Somit ist

$$\Delta e^{-(x^2+y^2+z^2)} = \big(4(x^2+y^2+z^2) - 2(x+y+z)\big)e^{-(x^2+y^2+z^2)} .$$

h) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds $\vec{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 \\ -x^2 - z^2 \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$!

Lösung: $\operatorname{rot} \vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z - 2y \\ 2x - 2z \\ 2y - 2x \end{pmatrix}$

i) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds $\vec{W}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} yz^2 \\ x^2z \\ xy^2 \end{pmatrix}$!

Lösung: $\operatorname{rot} \vec{W}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ 2yz - y^2 \\ 2xz - z^2 \end{pmatrix}$