Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5. Juli 2006

a) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{C}$?

$$\|z\|_1 = |z|\,, \qquad \|z\|_2 = \Re z + \Im z, \qquad \|z\|_3 = \max(\Re z, \Im z),$$
$$\|z\|_4 = \max(|\Re z|\,, |\Im z|), \qquad \|z\|_5 = (\Re z)(\Im z), \qquad \|z\|_6 = (\Re z)^2 + (\Im z)^2$$

Lösung: Betrachtet man $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen reellen Vektorraum, entspricht $\|z\|_1$ der EUKLIDischen Norm und $\|z\|_4$ der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$, also sind beides Normen.
Die restlichen Vorschriften definieren *keine* Normen: Wegen $\|1-i\|_2 = \|-1\|_3 = \|1\|_5 = 0$ erfüllen drei davon nicht die Bedingung, daß nur der Nullvektor Norm Null haben darf, und wegen $\|\lambda z\|_6 = \lambda^2\,\|z\|_6$ ist hier die Bedingung $\|\lambda z\|_6 = |\lambda|\,\|z\|_6$ verletzt.
Betrachtet man $\mathbb{C}$ als eindimensionalen komplexen Vektorraum, so definiert $\|z\|_1$ immer noch eine Norm, denn die zusätzliche Bedingung, daß $\|\lambda z\|_1 = |\lambda| \cdot \|z\|_1$ sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten soll, wird hier einfach zur wohlbekannten Gleichung $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$.
Allerdings gilt für $\lambda \notin \mathbb{R}$ im allgemeinen nicht mehr die Gleichung $\|\lambda z\|_4 = |\lambda| \cdot \|z\|_4$: Für $\lambda = z = 1 + i$ etwa ist $|\lambda| = \sqrt{2}$ und $\|1+i\|_4 = 1$, aber $\lambda z = (1+i)^2 = 2i$ hat $\|2i\|_4 = 2$. Somit definiert die vierte Vorschrift zwar eine Norm des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$, nicht aber des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}$.

b) Zeigen Sie mit irgendeiner der Vorschriften, die Normen definieren, daß die Abbildung $z \mapsto z^2$ bezüglich dieser Norm in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig ist!

Lösung: Am einfachsten ist meist die Maximumsnorm; sei also für zwei komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ die Bedingung $\|z - w\|_4 < \delta$ erfüllt, d.h.

$$|\Re z - \Re w| = |x - u| < \delta \quad \text{und} \quad |\Im z - \Im w| = |y - v| < \delta\,.$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} z^2 - w^2 &= (x^2 - y^2 + 2ixy) - (u^2 - v^2 + 2iuv) = (x^2 - u^2) + (v^2 - w^2) + 2i(xy - uv) \\ &= (x+y)(x-y) + (v+w)(v-w) + 2i\big((x(y-v) + (x-u)v\big)\,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \big|\Re(z^2 - w^2)\big| &= |(x+y)(x-y) + (v+w)(v-w)| \le |(x+y)(x-y)| + |(v+w)(v-w)| \\ &\le |x+y|\,\delta + |v+w|\,\delta\,. \end{aligned}$$

Da $|x-y| \le \delta$, ist $|x+y| \le |x| + |y| \le 2\,|x| + \delta$; genauso folgt, daß $|u+v| \le 2\,|u| + \delta$ ist. Also ist

$$\big|\Re(z^2 - w^2)\big| \le \delta\big((2\,|x| + \delta) + (2\,|u| + \delta)\big)\,.$$

Weiter ist

$$\big|\Im(z^2 - w^2)\big| = 2\,|(x(y-v) + (x-u)v| \le 2\,|x+v|\,\delta \le (|x| + |y| + \delta)\delta\,.$$

Mit $M = 1 + 2\,\|z\|_4 = 1 + 2\max(|x|\,, |y|)$ ist also für $\delta \le 1$

$$\big|\Re(z^2 - w^2)\big| \le M\delta \quad \text{und} \quad \big|\Im(z^2 - w^2)\big| \le M\delta\,.$$

Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so gilt für

$$\delta \underset{\text{def}}{=} \min\left(\frac{\varepsilon}{M}, 1\right)$$

die Folgerung

$$\|z-w\|_4 < \delta \Longrightarrow \left\|z^2 - w^2\right\|_4 < \varepsilon\,,$$

d.h. die Funktion ist stetig in z. (Man beachte, daß M nur von z abhängt, nicht von w!)

c) M sei der Vektorraum aller reeller $n \times m$-Matrizen. Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf M?

$$\|A\|_1 = \max_{(i,j)} |a_{ij}|\,,\quad \|A\|_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\,,\quad \|A\|_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\,,\quad \|A\|_4 = \max_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

Lösung: Die Bedingung $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$ erfüllen offenbar alle Kandidaten außer $\|A\|_3$; also ist das keine Norm und wir können uns im folgenden auf die übrigen Kandidaten beschränken.

Mit der Dreiecksungleichung gibt es nirgends Probleme, denn sie gilt für Beträge wie auch für EUKLIDische Normen, und wenn man mehrere Funktionen dieser Art summiert, addieren sich einfach sowohl die linken als auch die rechten Seiten, so daß die Dreiecksungleichung auch für die Summe gilt. Die dritte Bedingung schließlich ist auch in allen Fällen trivial. Also sind mit Ausnahme von $\|\cdot\|_3$ alles Normen.

d) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n, y_n) aus $\mathbb{R}^2$ sind konvergent für $n \to \infty$, und wohin konvergieren sie?

1) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$, *2)* $(x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$, *3)* $(x_n, y_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$

Lösung: Wenn wir mit der Maximumsnorm arbeiten, geht es einfach darum, die Konvergenz der beiden Komponenten nachzuweisen. Bei *1)* und *3)* ist das trivial (modulo *Analysis I*): Die Folgen konvergieren gegen $(0,0)$ *bzw.* $(0,1)$. Die zweite Folge dagegen konvergiert zwar in ihrer zweiten Komponente gegen null, die erste dagegen oszilliert ständig zwischen ± 1. Damit ist diese Folge nicht konvergent.

e) Was können Sie über eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?

Lösung: Da $f(x,y)$ nur von x^2+y^2 abhängt, gibt es eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ ist; da die Niveaulinien einzelne Kreise sowie der Nullpunkt sind, ist φ injektiv.

f) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

Lösung: Es ist ein Kegel um die z-Achse mit Spitze im Punkt $(0,0,5)$. Der Radius r wird auf der Höhe $5-r$ erreicht, der Öffnungswinkel ist also 45°.

g) Wo ist die Funktion f aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?

Lösung: Die Funktion $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und stetig; sie niemmt nur nichtnegative Werte an. Für diese ist die Quadratwurzelfunktion stetig, also ist f überall stetig. Mit der Differenzierbarkeit gibt es allerdings Probleme im Nullpunkt, denn dort ist $t \mapsto \sqrt{t}$ nicht differenzierbar.

h) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z, und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz$

$g(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy)$ $\qquad h(x,y,z) = \frac{x+y}{x-z}$

$k(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad \ell(x,y,z) = ax + by + cz + d$

Lösung:

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 3x^2+2xy+z^2+yz \\ f_y(x,y,z) &= 3y^2+x^2+2yz+xz \\ f_z(x,y,z) &= 3z^2+y^2+2xz+xy \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+2xy+z^2+yz \\ 3y^2+x^2+2yz+xz \\ 3z^2+y^2+2xz+xy \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_x(x,y,z) &= 2xe^{x^2+y^2+z^2}\cos(xy) - e^{x^2+y^2+z^2}\sin(xy)y \\ g_y(x,y,z) &= 2ye^{x^2+y^2+z^2}\cos(xy) - e^{x^2+y^2+z^2}\sin(xy)x \\ g_z(x,y,z) &= 2ze^{x^2+y^2+z^2}\cos(xy) \\ \nabla g(x,y,z) &= e^{x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} 2x\cos(xy)-y\sin(xy) \\ 2y\cos(xy)-x\sin(xy) \\ 2z\cos(xy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_x(x,y,z) &= \frac{1}{x-z} - \frac{x+y}{(x-z)^2} = -\frac{y+z}{(x-z)^2} \\ h_y(x,y,z) &= \frac{1}{x-z} \quad\Longrightarrow\quad \nabla h(x,y,z) = \frac{1}{(x-z)^2}\begin{pmatrix} -(y+z) \\ x-z \\ x+y \end{pmatrix} \\ h_z(x,y,z) &= \frac{x+y}{(x-z)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_x(x,y,z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ k_y(x,y,z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad\Longrightarrow\quad \nabla k(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ k_z(x,y,z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

$$\ell_x(x,y,z) = a, \qquad \ell_y(x,y,z) = b, \qquad \ell_z(x,y,z) = c \quad\Longrightarrow\quad \nabla\ell(x,y,z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Der Gradient ist der Vektor mit den partiellen Ableitungen als Komponenten; er existiert genau dort, wo jede seiner Komponenten existiert. Bei f, g und ℓ ist das der ganze $\mathbb{R}^3$, für h muß man, schon für die Funktion selbst, die Ebene $x = z$ ausschließen, und für grad k den Nullpunkt.

i) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die JACOBI-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lösung: *Richtig,* denn nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung einer Veränderlichen hängt eine Funktion einer Variablen nicht von dieser Variablen ab, wenn die Ableitung verschwindet. Falls alle partielle Ableitungen verschwinden, hängt jede Komponente $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Funktion also von keiner der Variablen ab und ist somit konstant.

j) Berechnen Sie die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:
$f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\quad (x,y,z) \mapsto x^3+y^3+z^3+3xyz$ $\qquad f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \sin x\cos y$
$f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \arctan x + y$

Lösung:

$$\nabla f_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+3yz \\ 3y^2+3xz \\ 3z^2+3xy \end{pmatrix}, \quad H_{f_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 3z & 3y \\ 3z & 6y & 3x \\ 3y & 3x & 6z \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_2(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x\cos y \\ -\sin x\sin y \end{pmatrix}, \quad H_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x\cos y & -\cos x\sin y \\ -\cos x\sin y & -\sin x\cos y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} \\ 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad H_{f_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2}+4x^2e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & 2e^{x^2+y^2}+4y^2ex^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_4(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_{f_4}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k) Berechnen Sie die vollständige TAYLOR-Reihe von f_1 um den Punkt $(0,0,0)$!

Lösung: Das ist natürlich gerade f_1 selbst.

l) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1,0,0)$!

Lösung: $f_1(1+h,j,k) = (1+h)^3 + j^3 + k^3 + 3(1+h)jk = 1 + 3h + 3h^2 + 3jk +$ Terme vom Grad drei. Somit ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades gleich $1 + 3h + 3h^2 + 3jk$.
Alternativ: Wir kennen bereits Gradient und HESSE-Matrix von f_1; an der Stelle $(1,0,0)$ ist

$$\nabla f_1(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_{f_1}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades gleich

$$f_1(1,0,0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h\ j\ k) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix}$$
$$= 1 + 3h + \frac{6h^2 + 3jk + 3kj}{2} = 1 + 3h + 3h^2 + 3jk\,.$$

m) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

Lösung: $f_2(x,y) = \sin x \cos y$ hat als TAYLOR-Reihe natürlich das Produkt der TAYLOR-Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\,;$$

das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 ist daher x, denn alle sonstigen Terme des Produkts haben höheren Grad als zwei.
Genauso können wir bei $f_3(x,y) = e^{x^2+y^2}$ einfach $x^2 + y^2$ in die TAYLOR-Reihe $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ einsetzen und alle Terme vom Grad größer zwei in x,y weglassen; das Ergebnis ist $1 + x^2 + y^2$.
Für $f_4(x) = \arctan x + y$ müssen wir einfach y zum TAYLOR-Polynom des Arkustangens addieren. Wegen

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

ergibt sich $x + y$ als TAYLOR-Polynom zweiten Grades.

n) *Richtig oder falsch:* Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Falls für $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ überall $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$ ist, kann $f(x,y) = 0$ überall eindeutig nach y aufgelöst werden.

Lösung: *Falsch:* Für $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ etwa ist $\operatorname{grad} f(x,y) = \binom{2x}{2y}$ auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ überall ungleich dem Nullvektor, aber in den Punkten $(\pm 1, 0)$, wo die partielle Ableitung nach y verschwindet, können wir die Kreisgleichung nicht *eindeutig* nach y auflösen: Sowohl die positive als auch die negative Wurzel geben Auflösungen.

o) *Richtig oder falsch:* Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ist genau dann in einer Umgebung von $(a_0, \ldots a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ eindeutig nach x auflösbar, wenn x eine einfache Nullstelle des Polynoms $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ ist.

Lösung: *Richtig,* denn die partielle Ableitung nach x ist gerade die Ableitung des Polynoms $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, und die verschwindet genau dann in einer Nullstelle x, wenn diese Nullstelle mehrfach ist. Für eine einfache Nullstelle (und nur dafür) gibt es also lokal eine eindeutige Auflösung – auch wenn diese für $n > 4$ nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann.

p) Bestimmen Sie für $F(x, y) = xy - x\sin y \cdot \cos y - 3x - 5$ alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $F(x, y) = 0$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

Lösung: Die partielle Ableitung nach y ist

$$F_y(x, y) = x - x\cos^2 y + x\sin^2 y = 2x\sin^2 y\ ;$$

sie verschwindet genau dann, wenn $x = 0$ oder y ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Da $F(0, y) = -5$ ist, können wir den Fall $x = 0$ vergessen.

$$F(x, k\pi) = k\pi \cdot x - 3x - 5 = (k\pi - 3)x - 5$$

verschwindet genau dann, wenn $x = \dfrac{5}{k\pi - 3}$ ist; in den Punkten $\left(\dfrac{5}{k\pi - 3}, k\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist die Gleichung also nicht nach y auflösbar.

q) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0, y_0), in deren Umgebung $f(x, y) = 0$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der Funktion $f(x)$, für die dort $F\big(x, f(x)\big) = 0$ ist.

Lösung: Nach der allgemeinen Formel ist

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{3 - y + \sin y\cos y}{2x\ \sin^2 y}\ .$$