Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5. Juli 2006

a) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{C}$?

$$\|z\|_1 = |z|, \qquad \|z\|_2 = \Re z + \Im z, \qquad \|z\|_3 = \max(\Re z, \Im z),$$
$$\|z\|_4 = \max(|\Re z|, |\Im z|), \qquad \|z\|_5 = (\Re z)(\Im z), \qquad \|z\|_6 = (\Re z)^2 + (\Im z)^2$$

b) Zeigen Sie mit irgendeiner der Vorschriften, die Normen definieren, daß die Abbildung $z \mapsto z^2$ bezüglich dieser Norm in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig ist!

c) M sei der Vektorraum aller reeller $n \times m$-Matrizen. Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf M?

$$\|A\|_1 = \max_{(i,j)} |a_{ij}|\ , \quad \|A\|_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\ , \quad \|A\|_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\ , \quad \|A\|_4 = \max_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

d) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n, y_n) aus $\mathbb{R}^2$ sind konvergent für $n \to \infty$, und wohin konvergieren sie?

1) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$, *2)* $(x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$, *3)* $(x_n, y_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$

e) Was können Sie über eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?

f) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

g) Wo ist die Funktion f aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?

h) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z, und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz$$
$$g(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy) \qquad h(x,y,z) = \frac{x+y}{x-z}$$
$$k(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \ell(x,y,z) = ax + by + cz + d$$

i) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die Jacobi-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

j) Berechnen Sie die Hesse-Matrizen der folgenden Funktionen:

$f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\quad (x,y,z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \qquad f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \sin x \cos y$

$f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2} \qquad f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \arctan x + y$

k) Berechnen Sie die vollständige Taylor-Reihe von f_1 um den Punkt $(0,0,0)$!

l) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1,0,0)$!

m) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

n) *Richtig oder falsch:* Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Falls für $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ überall $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$ ist, kann $f(x,y) = 0$ überall eindeutig nach y aufgelöst werden.

o) *Richtig oder falsch:* Die Gleichung $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ist genau dann in einer Umgebung von $(a_0, \dots a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ eindeutig nach x auflösbar, wenn x eine einfache Nullstelle des Polynoms $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ ist.

p) Bestimmen Sie für $F(x,y) = xy - x\sin y \cdot \cos y - 3x - 5$ alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $F(x,y) = 0$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

q) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0, y_0), in deren Umgebung $f(x,y) = 0$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der Funktion $f(x)$, für die dort $F\big(x, f(x)\big) = 0$ ist.