Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 21. Juni 2006

a) Zeigen Sie: Eine $n \times n$-Matrix A mit ganzzahligen Einträgen hat genau dann eine inverse Matrix mit ganzzahligen Einträgen, wenn $\det A = \pm 1$ ist.

Lösung: Falls A und A^{-1} nur ganzzahlige Einträge haben, sind $\det A$ und $\det A^{-1}$ ganze Zahlen und $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Dies ist nur möglich, falls $\det A = \det A^{-1} = \pm 1$ ist.

Umgekehrt sei $\det A = \pm 1$ und alle Einträge von A ganzzahlig. Der i-te Spaltenvektor von A ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{e}_i$, wobei $\vec{e}_i$ der i-te Einheitsvektor ist. Nach der Cramerschen Regel ist berechnen sich die Komponenten von $\vec{x}$ als Quotienten zweier Determinanten, wobei im Nenner $\det A = \pm 1$ steht und im Zähler die Determinante einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen, also eine ganze Zahl. Somit sind alle Lösungen ganzzahlig und mithin auch alle Einträge von A^{-1}.

b) Für die Vektorräume $\mathbb{F}_2^n$ sei eine Bilinearform $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n$ definiert durch die übliche Formel $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$. Welche Vektoren aus $\mathbb{F}_2^n$ haben dann Produkt Null mit sich selbst?

Lösung: $\vec{v} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i$, da jedes der beiden Elemente von $\mathbb{F}_2$ sein eigenes Quadrat ist. Lösungen sind also die Vektoren mit einer geraden Anzahl von Einsen unter ihren Komponenten.

c) $\mathbb{C}^2$ sei mit seinem Standard Hermiteschen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}!$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{1} = -i + i = 0$$
$$\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = i \cdot \bar{1} + i \cdot \bar{1} = 2i$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = -2i \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} = \bar{i} + \bar{i} = -2i$$

d) *Richtig oder falsch:* $\mathbb{R}^2$ mit dem Produkt $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1$ ist ein Euklidischer Vektorraum.

Lösung: *Falsch,* denn das Produkt ist nicht symmetrisch.

e) Was ändert sich, wenn man stattdessen $|\vec{v} \odot \vec{w}|$ als Produkt nimmt?

Lösung: Jetzt ist es zwar symmetrisch, aber nicht mehr linear.

f) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) + 4v_3w_3 & (1) \\ (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) - 4v_3w_3 & (2) \\ v_1w_2 + v_2w_3 + v_3w_1 & (3) \\ v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3 + v_2(w_1 + w_3) + (v_1 + v_3)w_2 & (4) \end{cases}$$

Lösung: Die Bilinearität ist in allen Fällen trivial, symmetrisch sind (1), (2) und (4). Positive Semidefinitheit ist klar bei (1), aber das Produkt ist nicht definit, da z.B.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ist. (2) ist nicht einmal positiv semidefinit, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1+2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 .$$

Was (4) betrifft, so ist

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1^2 + 2v_2^2 + 3v_3^2 + 2v_2(v_1 + v_3) .$$

Quadratische Ergänzung macht daraus

$$(v_1 + v_2)^2 + (v_2 + v_3)^2 + 2v_3^2 ,$$

was nie negativ sein kann. Der Ausdruck verschwindet genau dann, wenn alle drei Quadrate verschwinden, d.h.

$$v_1 = -v_2, \quad v_2 = -v_3 \quad \text{und} \quad v_3 = 0 .$$

Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn alle Komponenten v_i verschwinden. Damit definiert (4) und nur (4) ein Skalarprodukt.

g) *Richtig oder falsch:* Die LORENTZ-Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$ macht $\mathbb{R}^4$ zum EUKLIDischen Vektorraum.

Lösung: *Falsch,* denn sie ist offensichtlich nicht positiv definit. (Aber trotzdem nützlich!)

h) *Richtig oder falsch:* $\binom{a}{b} \odot \binom{c}{d} = a\overline{c} + \overline{b}d$ definiert ein HERMITEches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$.

Lösung: *Falsch,* es ist nicht linear im ersten Argument: $\left(i\binom{1}{i}\right) \odot \binom{1}{1} = \binom{i}{-1} \odot \binom{1}{1} = i - 1$, aber $i\left(\binom{1}{i} \odot \binom{1}{1}\right) = i(1 - i) = i + 1$.

i) Drücken Sie für ein HERMITEsches Skalarprodukt das Produkt $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w})$ aus durch $\vec{v} \cdot \vec{w}$!

Lösung: $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w}) = i\big(\vec{v} \cdot (i\vec{w})\big) = i\overline{i}\big(\vec{v} \cdot \vec{w}\big) = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

j) Gibt es ein HERMITEsches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, das nur reelle Werte annimmt?

Lösung: Natürlich nicht; wegen der Linearität im ersten Argument kann jedes HERMITEsche Skalarprodukt jede komplexe Zahl als Wert annehmen.

k) Zeigen Sie: Für zwei beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eines EUKLIDischen Vektorraums V gilt: $|\vec{v}+\vec{w}| \le |\vec{v}| + |\vec{w}|$. (*Hinweis:* Quadrieren Sie beide Seiten!)

Lösung: Da Längen von Vektoren nicht negativ sind, ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zur entsprechenden Ungleichung mit beiden Seiten quadriert, also zur Ungleichung $|\vec{v}+\vec{w}|^2 \le \big(|\vec{v}| + |\vec{w}|\big)^2$. Da

$$|\vec{v}+\vec{w}|^2 = (\vec{v}+\vec{w}) \cdot (\vec{v}+\vec{w}) = |\vec{v}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2$$

und

$$\big(|\vec{v}| + |\vec{w}|\big)^2 = |\vec{v}|^2 + 2\,|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| + |\vec{w}|^2 ,$$

ist diese aber äquivalent zu CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung.

l) Gilt diese Formel auch für HERMITEsche Vektorräume?

Lösung: Ja, denn zwar ist nun $|\vec{v}+\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} + |\vec{w}|^2$, aber nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung können wir jedes der beiden Produkte $\vec{v} \cdot \vec{w}$ und $\vec{w} \cdot \vec{v}$ durch $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ abschätzen.

m) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $x + 2y + 5z = 0$ des $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt.

Lösung: Zunächst brauchen wir irgendeine Basis dieses Untervektorraums. Als Kern einer surjektiven linearen Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ ist er zweidimensional, und offensichtlich sind die beiden Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei linear unabhängige Elemente daraus.
Zur Konstruktion einer Orthogonalbasis nach GRAM-SCHMIDT setzen wir $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ und machen für $\vec{c}_2$ einen Ansatz der Form $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda \vec{c}_1$.

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1} ,$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \quad \text{und} \quad \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^2 + 1^2 = 5 .$$

Somit ist $\lambda = -2$ und

$$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, und $\vec{c}_1$ hat, wie wir bereits nachgerechnet haben, Länge $\sqrt{5}$. Daher bilden

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine der gesuchten Orthonormalbasen.

n) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die den Vektor $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält!

Lösung: Wir ergänzen zu irgendeiner Basis des $\mathbb{R}^3$ und wenden darauf das GRAM-SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren an. Zur Rechenersparnis empfiehlt es sich, die neuen Basisvektoren gleich so zu wählen, daß sie auf dem gegebenen Vektor $\vec{b}_1$ senkrecht stehen, also im Untervektorraum $2x + y + 2z = 0$ liegen, z.B.

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Dann sind $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ bereits orthogonal zueinander, wir müssen also nur noch einen dritten Vektor $\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + \lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2$ finden, der auf $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ senkrecht steht, wobei wir bereits wissen, daß $\vec{b}_3$ auf $\vec{b}_1$ senkrecht steht:

$$\vec{c}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2\vec{b}_1 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 0$$
$$\vec{c}_3 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2\vec{b}_2 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 ,$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \Longrightarrow \mu = -\frac{1}{5}$$

Also ist $\vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \frac{1}{5}\vec{b}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $\vec{c}_3 \cdot \vec{c}_3 = \frac{16+4+25}{25} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$.

Damit kennen wir auch alle Längen, und können nun leicht eine Orthonormalbasis hinschreiben: $\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$.

o) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^3$ mit seinem üblichen HERMITEschen Skalarprodukt!

Lösung: Um zunächst eine Orthogonalbasis zu bekommen, ersetzen wir $\vec{b}_2$ durch eine Linearkombination $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda\vec{b}_1$, die auf $\vec{b}_1$ senkrecht steht. Also ist

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} .$$

Hier ist

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = (2+3i) \cdot 2 + (4+3i) \cdot (-3i) + (6+i) \cdot 6 = 49$$

und

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 49 .$$

Somit ist $\lambda = -1$ und

$$\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = 3^2 + 4^2 + 1^2 = 26 .$$

Damit bilden die beiden Vektoren

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3i\\6\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}3i\\4\\i\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ erzeugten Untervektorraums.

p) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von 1 und e^x aufgespannten Untervektorraums von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$!

Lösung: Wegen $(1, 1) = \int_0^1 1^2\,dx = 1$ hat 1 bereits die Länge eins, während

$$(e^x, e^x) = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^2-1}{2}$$

ist. Wegen $(1, e^x) = \int_0^1 e^x\,dx = e-1$ folgt

$$(e^x+\lambda, 1) = (e^x, 1) + (\lambda, 1) = e-1+\lambda = 0 \iff \lambda = 1-e\,,$$

d.h. der „Vektor" $e^x + 1 - e$ steht senkrecht auf 1. Seine Länge ist

$$\begin{aligned}(e^x+1-e,\, e^x+1-e) &= (e^x, e^x)+(1-e, 1-e)+2(e^x, 1-e) = \frac{e^2-1}{2}+(1-e)^2+2(1-e)\cdot(e-1)\\ &= \frac{e^2-1}{2}-(e-1)^2 = \frac{e^2-1-2e^2+4e-2}{2} = \frac{4e-e^2-3}{2} \approx 0{,}242\,;\end{aligned}$$

als Orthonormalbasis können wir also die Eins nehmen zusammen mit

$$\frac{e^x+1-e}{\sqrt{\frac{4e-e^2-3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,(e^x+1-e)}{\sqrt{4e-e^2-3}}\,.$$