Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, Zimmer C 201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 21. Juni 2006

*a)* Zeigen Sie: Eine $n \times n$-Matrix $A$ mit ganzzahligen Einträgen hat genau dann eine inverse Matrix mit ganzzahligen Einträgen, wenn $\det A = \pm 1$ ist.

*b)* Für die Vektorräume $\mathbb{F}_2^n$ sei eine Bilinearform $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n$ definiert durch die übliche Formel $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i w_i$. Welche Vektoren aus $\mathbb{F}_2^n$ haben dann Produkt Null mit sich selbst?

*c)* $\mathbb{C}^2$ sei mit seinem Standard Hermiteschen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}!$$

*d) Richtig oder falsch:* $\mathbb{R}^2$ mit dem Produkt $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = v_1w_2 - v_2w_1$ ist ein Euklidischer Vektorraum.

*e)* Was ändert sich, wenn man stattdessen $|\vec{v} \odot \vec{w}|$ als Produkt nimmt?

*f)* Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ?

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} = \begin{cases} (v_1+2v_2)(w_1+2w_2)+4v_3w_3 & (1)\\ (v_1+2v_2)(w_1+2w_2)-4v_3w_3 & (2)\\ v_1w_2+v_2w_3+v_3w_1 & (3)\\ v_1w_1+2v_2w_2+3v_3w_3+v_2(w_1+w_3)+(v_1+v_3)w_2 & (4)\end{cases}$$

*g) Richtig oder falsch:* Die Lorentz-Form $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\\t_1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\\t_2\end{pmatrix} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-c^2t_1t_2$ macht $\mathbb{R}^4$ zum Euklidischen Vektorraum.

*h) Richtig oder falsch:* $\binom{a}{b} \odot \binom{c}{d} = a\overline{c} + \overline{b}d$ definiert ein Hermiteches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$.

*i)* Drücken Sie für ein Hermitesches Skalarprodukt das Produkt $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w})$ aus durch $\vec{v} \cdot \vec{w}$!

*j)* Gibt es ein Hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, das nur reelle Werte annimmt?

*k)* Zeigen Sie: Für zwei beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eines Euklidischen Vektorraums $V$ gilt: $|\vec{v}+\vec{w}| \le |\vec{v}| + |\vec{w}|$ . (*Hinweis:* Quadrieren Sie beide Seiten!)

*l)* Gilt diese Formel auch für Hermitesche Vektorräume?

*m)* Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $x+2y+5z=0$ des $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt.

*n)* Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die den Vektor $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ enthält!

*o)* Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\3i\\6\end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}2+3i\\4+3i\\6+i\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^3$ mit seinem üblichen Hermiteschen Skalarprodukt!

*p)* Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von 1 und $e^x$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$!