Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 14. Juni 2006

a) Schreiben Sie $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ als Produkt von Transpositionen!

Lösung: Da $\pi(3) = 5$ ist, läßt $\pi \circ (3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ die Zahl 5 fest. Diese Permutation wiederum bildet 3 auf 4 ab, also läßt

$$\pi \circ (3\,5) \circ (3\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2\,3)$$

zusätzlich auch noch vier fest. Damit ist

$$\pi \circ (3\,5) \circ (3\,4) = (2\,3) \quad \text{und} \quad \pi = (2\,3) \circ (3\,4) \circ (3\,5)\,.$$

b) Schreiben Sie π^{-1} als Produkt von Transpositionen!

Lösung: Da $\pi \circ \pi^{-1}$ die Identität sein soll, müssen wir die Transpositionen von $\pi = (2\,3) \circ (3\,4) \circ (3\,5)$ schrittweise rückgängig machen, d.h.

$$\pi^{-1} = (3\,5) \circ (3\,4) \circ (2\,3)\,.$$

(Wie schon beim vorigen Themenvorschlag ist das natürlich nicht die einzige Möglichkeit: Wie schon die Vielzahl verschiedener Sortieralgorithmen zeigt, gibt es in beiden Fällen viele Alternativen.)

c) Ist π gerade oder ungerade?

Lösung: π ist ungerade, da es als Produkt von drei Transpositionen geschrieben werden kann.

d) *Richtig oder falsch:* π^{-1} ist genau dann gerade, wenn π gerade ist.

Lösung: *Richtig,* denn ist $\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n$ eine Darstellung von π als Produkt von n Transpositionen, so ist (siehe vorletztes Thema) auch $\pi^{-1} = \tau_n \circ \cdots \circ \tau_1$ als Produkt von n Transpositionen darstellbar.

e) A_π sei die Permutationsmatrix zu $\pi \in \mathfrak{S}_n$, d.h. $a_{ij} = 1$, falls $j = \pi(i)$ und null sonst. Was ist $\det A_\pi$?

Lösung: Permutiert man die Zeilen von A gemäß der Permutation π, erhält man die Einheitsmatrix. Ist π ein Produkt von r Transpositionen, ist die Anwendung von π äquivalent zu r Zeilenvertauschungen, d.h. $\det A = (-1)^r \det E = (-1)^r$. Damit ist

$$\det A = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } \pi \text{ ungerade} \end{cases}.$$

f) Zeigen Sie: Jede Permutation π der Form $i \to j \to k \to i$, die drei Zahlen zyklisch vertauscht, ist gerade.

Lösung: Wegen $\pi(j) = k$ läßt $\pi \circ (j\,k)$ die Zahl k fest. Sie bildet i auf j ab und j auf i, ist also gleich der Transposition $(i\,k)$, und damit ist $\pi = (i\,k) \circ (i\,j)$.

g) Bestimmen Sie, ohne zu rechnen, den *Betrag* der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} !$$

Lösung: Anwendung der Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ auf die Spalten der Matrix führt auf eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen; diese hat Determinante eins. Damit ist $\det A = \pm 1$, der Betrag ist also eins.
(Schreibt man π wie oben als Produkt von Transpositionen, sieht man leicht, daß π eine gerade Permutation ist, d.h. $\det A = +1$.)

h) Berechnen Sie die Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} !$$

Lösung: Da in der ersten Zeile der Matrix zu D_1 lauter Einsen stehen, bietet sich an, drei von diesen durch Spaltenoperationen zum Verschwinden zu bringen: Subtraktion der ersten Spalte von allen folgenden und anschließende Entwicklung nach der ersten Zeile zeigt, daß

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

ist. Diese Matrix läßt sich nach SARRUS berechnen oder durch nochmalige Anwendung desselben Tricks: Die erste Spalte wird zweimal von der zweiten und dreimal von der dritten subtrahiert:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2 = 1 .$$

Bei D_2 bietet sich Entwicklung nach der dritten Zeile an; noch einfacher wird es aber, wenn wir vorher die zweite Spalte von der dritten subtrahieren:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Subtrahieren wir nun noch die erste Zeile von der zweiten, bevor wir nach der zweiten Spalte entwickeln, folgt

$$D_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 4 .$$

Bei D_3 ist fast selbstverständlich, daß wir zunächst nach der dritten Zeile entwickeln:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Als nächstes bietet sich an, die zweite Spalte von der dritten zu subtrahieren und dann nach der dritten zu entwickeln:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\,.$$

i) Welche Gleichung muß x erfüllen, damit die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind?

Lösung: Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Determinante verschwindet. Diese ist

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x & 4 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix}.$$

Subtraktion der dritten Zeile von der ersten sowie der vierten von der zweiten und anschließende Enwicklung nach der ersten Zeile führt auf

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x-2 & 0 & 4-x \\ 0 & 2-x & 0 & 4-x \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 1 & x & x \\ x & 3 & x \end{vmatrix} - (4-x) \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}.$$

Addieren wir noch die zweite Zeile zur ersten, vereinfacht sich dies zu

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2(4-x) \\ 0 & 2-x & 0 & 4-x \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix} = -2(4-x) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-x)(2-x) \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix} = 2(4-x)(2-x)(3-x^2)\,.$$

Die Vektoren sind also genau dann linear abhängig, wenn $x = 2$, $x = 4$ oder $x = \pm\sqrt{3}$ ist.

j) *Richtig oder falsch:* Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Determinante ± 1 hat, sind a und d teilerfremd zu b und c.

Lösung: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ist durch jeden gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen a oder d und b oder c teilbar; falls die Determinante gleich ± 1 ist, kann es daher keinen echten solchen Teiler geben. Daher ist die Behauptung richtig.

k) Richtig oder falsch: Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine ganzzahlige Matrix als Inverse hat, ist ihre Determinante gleich ± 1.

Lösung: *Richtig,* denn $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ ist, falls sowohl A als auch A^{-1} ganzzahlige Einträge haben, ein Produkt ganzer Zahlen. Dies ist nur möglich für

$$\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1 \,.$$

l) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung:

$$\det(M - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \,;$$

einziger Eigenwert ist also $\lambda = 1$. Für die Eigenvektoren erhalten wir das Gleichungssystem

$$0x + 2y = 0 \quad \text{und} \quad 0x + y = 0 \,,$$

Eigenvektoren sind also alle Vektoren der Form $\binom{x}{0}$ mit $x \neq 0$.

m) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung:

$$\det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + i^2 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \,.$$

Die Eigenwerte sind also 0 und 2.
Das Gleichungssystem $x + iy = 0$ und $-ix + y = 0$ ist äquivalent zu $y = ix$, der Eigenraum zum Eigenwert Null wird also aufgespannt vom Vektor $\binom{1}{i}$. Für $\lambda = 2$ haben wir die Gleichungen $-x + iy = 0$ und $-ix - y = 0$, d.h. hier ist $\binom{1}{-i}$ ein Eigenvektor. (Wir könnten stattdessen natürlich auch $\binom{i}{1}$ nehmen; die beiden Vektoren spannen denselben Unterraum von $\mathbb{C}^2$ auf.)

n) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$!

Lösung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 4 & -4 & -\lambda \end{vmatrix}$, was wir nach Sarrus berechnen können als

$$\begin{aligned} &-(1+\lambda)\lambda^2 - 8 + 4 - 4\lambda + 4(1+\lambda) + 2\lambda \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) \,. \end{aligned}$$

Somit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -2$.
Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$ erfüllen des lineare Gleichungssystem $A\vec{v} = \vec{0}$ oder

$$-x + 2y - z = x - z = 4x - 4y = 0 \,;$$

aus den letzten beiden Gleichungen folgt, daß $x = y$ und $x = z$ sein muß, d.h. $x = y = z$, und dann ist auch die erste Gleichung erfüllt. Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$ sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ erfüllen des lineare Gleichungssystem $(A - E)\vec{v} = \vec{0}$ oder

$$-2x + 2y - z = x - y - z = 4x - 4y - z = 0\,.$$

Addiert man die mittlere Gleichung zweimal zur vorderen und subtrahiert sie viermal von der hinteren, fallen in beiden Gleichungen außer den x-Termen auch noch die y-Terme mit, so daß sie äquivalent werden zu $z = 0$. Setzt man dies in eine beliebige der drei Gleichungen ein, folgt, daß $x = y$ sein muß, die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1$ sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_3 = -2$ schließlich müssen wir das Gleichungssystem $(A + 2E)\vec{v} = \vec{0}$ lösen; explizit ist dies

$$x + 2y - z = x + 2y - z = 4x - 4y + 2z = 0\,.$$

Die erste Gleichung ist also identisch mit der zweiten; addiert man sie zweimal zur dritten, ergibt sich $6x = 0$, d.h. x muß verschwinden. Dann wird das Gleichungssystem äquivalent zu $z = 2y$, ie Eigenvektoren zu $\lambda_3 = -2$ sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

o) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat!

Lösung: Da wir den allgemeinen Satz, wonach Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig sind, noch nicht kennen, müssen wir explizit zeigen, daß die drei gefundenen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind. Ist

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda + \mu + \nu \\ \lambda + 2\nu \end{pmatrix} = \vec{0}\,,$$

so muß ν als Differenz zwischen mittlerem und oberem Eintrag verschwinden, damit wegen des unteren Eintrags $\lambda + 2\nu$ auch λ, also wegen des oberen Eintrags auch μ. Somit sind die drei Vektoren linearen unabhängig, bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

p) Wie sieht die Matrix A bezüglich dieser Basis aus?

Lösung: Da jeder der Vektoren $\vec{v}_i$ einfach mit dem zugehörigen Eigenwert λ_i multipliziert wird, ist dies die Diagonalmatrix mit den λ_i als Einträgen, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$