WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, ZIMMER C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24. Mai 2006

*a)* Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis aus den drei Einheitsvektoren!

**Lösung:** Nimmt man die drei Einheitsvektoren in ihrer üblichen Reihenfolge, ist die Abbildungsmatrix wegen

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gleich $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

*b)* Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{bezüglich der Basis } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ von } \mathbb{R}^2\,!$$

**Lösung:** $\psi(\binom{1}{1}) = \binom{1}{1}$ und $\psi(\binom{1}{-1}) = \binom{-1}{1} = -\binom{1}{-1}$; der erste Basisvektor wird also auf sich selbst abgebildet und der zweite auf sein negatives. Damit ist die Abbildungsmatrix gleich der Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

*c)* Der Untervektorraum $U$ von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ habe die Funktionen $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \sin 3t$ und $\cos 3t$ als Basis. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\omega\colon U \to U;\ f \mapsto \frac{df}{dt}$ !

**Lösung:** Wir müssen die Bilder der Basisvektoren bestimmen:

$$\begin{aligned}
\omega(\sin t) &= \frac{d}{dt}\sin t = \cos t \\
\omega(\cos t) &= \frac{d}{dt}\cos t = -\sin t \\
\omega(\sin 2t) &= \frac{d}{dt}\sin 2t = 2\cos 2t \\
\omega(\cos 2t) &= \frac{d}{dt}\cos 2t = -2\sin 2t \\
\omega(\sin 3t) &= \frac{d}{dt}\sin 3t = 3\cos 3t \\
\omega(\cos 3t) &= \frac{d}{dt}\cos 3t = -3\sin 3t
\end{aligned}$$

Damit ist zunächst klar, daß die Abbildung den Untervektorraum $U$ wirklich auf sich selbst abbildet. Da die Bilder der Basisvektoren einfach Vielfache anderer Basisvektoren sind, hat jede Spalte der Abbildungsmatrix bezüglich der angegebenen Basis genau einen

Eintrag; die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

*d)* V sei der Vektorraum aller reeller Polynome in $x$ vom Grad höchstens vier. Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis von V die Abbildungsmatrix von $\vartheta\colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto x^2 f'' - 2f' - 3f \end{cases}$ !

**Lösung:** Als Basis nimmt man am einfachsten die $x$-Potenzen in auf- oder absteigender Reihenfolge, also z.B. $\mathcal{B} = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$. Wegen

$$\begin{aligned} \vartheta(x^4) &= 12x^4 - 8x^3 - 3x^4 = 9x^4 - 8x^3 \\ \vartheta(x^3) &= 6x^3 - 6x^2 - 3x^3 = 3x^3 - 6x^2 \\ \vartheta(x^2) &= 2x^2 - 4x - 3x^2 = -x^2 - 4x \\ \vartheta(x) &= -2 - 3x \\ \vartheta(1) &= -3 \end{aligned}$$

ist die Abbildungsmatrix gleich $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

*e)* $\mathbb{C}$ werde als reeller Vektorraum mit Basis $\{1, i\}$ betrachtet. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\chi\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \operatorname{\mathfrak{Re}} z - \operatorname{\mathfrak{Im}} z \end{cases}$ sowie Basen des Kerns und des Bilds von $\chi$ !

**Lösung:** $\chi(x + iy) = (x - y) + 0 \cdot i$, also ist die Abbildungsmatrix gleich $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Im Kern liegen alle komplexen Zahlen mit übereinstimmendem Real- und Imaginärteil, also alle Zahlen der Form $x + ix$; eine Basis dieses eindimensionalen reellen Untervektorraums bildet beispielsweise die komplexe Zahl $1 + i$. Das Bild besteht genau aus den reellen Zahlen; somit ist 1 die offensichtliche Wahl für den Basisvektor.

*f)* Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Produkte $AB$ und $BA$!

**Lösung:** Die Rechenschemata

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

zeigen, daß $AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ist.

*g)* $A$ sei eine beliebige $n \times n$-Matrix, und $B$ sei die $n \times n$-Matrix mit lauter Einsen als Einträgen. Berechnen Sie $AB$ und $BA$ !

**Lösung:** Wir bezeichnen die Einträge von $A$ mit $a_{ij}$. Da alle Einträge von $B$ gleich Eins sind, ist der $ik$-Eintrag von $AB$ gleich $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, also unabhängig von $k$ stets die Summe der Einträge der $i$-ten Spalte von $A$. Entsprechend ist der $ik$-Eintrag von $BA$ gleich $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk}$ unabhängig von $i$ stets gleich der Summe der Einträge der $k$-ten Spalte von $A$.

*h)* Welche Bedingung muß $A$ im vorigen Beispiel erfüllen, damit $AB = BA$ ist?

**Lösung:** Der $ik$-Eintrag von $AB$ ist die $i$-te Spaltensumme von $A$, der von $BA$ die $k$-te Spaltensumme; somit müssen alle Zeilen und alle Spalten von $A$ dieselbe Summe haben. Die Einträge von $A$ bilden also ein sogenanntes magisches Quadrat.

*i)* Zeigen Sie: Für alle $a, b \in k$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Lösung:** Einfach nach Schema F miteinander multiplizieren.

*j)* Für alle $a \in k$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für $n < 0$ soll dabei $A^n$ die inverse Matrix von $A^{-n}$ bezeichnen – falls diese existiert.

**Lösung:** Für $n \in \mathbb{N}$ ist das ein einfacher Induktionsbeweis: Für $n = 1$ steht offensichtlich auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselbe Matrix, und für $n > 1$ ist nach Induktionsannahme und der vorigen Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $n < 0$ ist $-n \in \mathbb{N}$, nach der vorigen Aufgabe und dem bereits Bewiesenen ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (-n)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & na - na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und entsprechend auch für das Produkt in der anderen Reihenfolge. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist somit invers zu $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-n}$. Für $n = 0$ schließlich haben wir eine nullte Potenz, ein leeres Produkt also, und das wird nach der üblichen Konvention als Neutralelement bezüglich der Multiplikation definiert, d.h. als Einheitsmatrix.

*k)* Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl $n$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

**Lösung:** Auch das ist wieder ein Fall für eine vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist $3^{n-1} = 3^0 = 1$, die Behauptung ist also richtig.
Für $n > 1$ ist nach Induktionsannahme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im rechtsstehenden Produkt wird für jeden Eintrag der Produktmatrix die Zahl $3^{n-2}$ dreimal mit Eins multipliziert; die Addition dieser Produkte ergibt $3^{n-1}$. Also haben alle Einträge der $n$-ten Potenz den Wert $3^{n-1}$, und die Behauptung ist bewiesen.

*(Falls der obige Themenvorschlag über Produkte mit einer Matrix aus lauter Einsen bearbeitet wurde, kann man sich diesen letzten Rechenschritt natürlich schenken.)*

*l)* Gilt diese Formel auch für $n = -1$ ?

**Lösung:** Für $n = -1$ besagt die Behauptung, daß

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \end{pmatrix}$$

ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} \end{pmatrix}$$

müßte die Einheitsmatrix sein, was offensichtlich nicht der Fall ist. Also gilt die Behauptung nicht für $n = -1$, und in der Tat ist die Matrix mit lauter Einsen als Einträgen offensichtlich nicht invertierbar: Sie ist schließlich die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung, die den gesamten $\mathbb{R}^3$ abbildet auf den vom Vektor $(1, 1, 1)$ erzeugten Untervektorraum, und diese Abbildung ist nicht umkehrbar.

*m)* In der $10 \times 10$-Matrix $A$ sei $a_{ij} = 1$ für $j = i - 1$ und Null sonst. Berechnen Sie $A^{10}$ !

**Lösung:** Die zu $A$ gehörende lineare Abbildung $\varphi: k^{10} \to k^{10}$ bildet den ersten Basisvektor ab auf den zweiten, diesen auf den dritten *usw.*, bis der neunte auf den zehnten abgebildet wird und der zehnte auf den Nullvektor. $A^r$ ist für jede natürliche Zahl $r$ die Abbildungsmatrix der $r$-fachen Anwendung von $\varphi$, bildet also den $i$-ten Basisvektor ab auf den $(i + r)$-ten, falls es einen solchen gibt, und ansonsten auf den Nullvektor. Für $r \geq 10$ ist immer letzteres der Fall, also ist $A^{10}$ die Nullmatrix.

*n)* Die $n \times n$-Matrix $A$ habe nur Nullen und Einsen als Einträge. Finden Sie Schranken $u_m$ und $o_m$, so daß für jeden Eintrag $b$ der Matrix $A^m$ gilt: $u_m \leq b \leq o_m$ !

**Lösung:** Der $ik$-Eintrag der Matrix $A^2$ berechnet sich als $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk}$; da die Einträge von $A$ allesamt Null oder Eins sind, gilt dasselbe für die Produkte $a_{ij}a_{jk}$, deren Summe somit zwischen Null und $n$ liegt. Multipliziert man diese Matrix nochmals mit $A$, so erhält man Summen aus $n$ Summanden, die allesamt zwischen Null und $n$ liegen, die Summe liegt also zwischen Null und $n^2$, *usw.*

Allgemein wird man daher vermuten, daß die Einträge von $A^m$ zwischen Null und $n^{m-1}$ liegen, was man in der Tat leicht mittels vollständiger Induktion nachweisen kann:

Für $m = 1$ ist dies gerade die Voraussetzung, daß alle Einträge von $A$ Null oder Eins sind.

Für $m > 1$ habe $A^{m-1}$ die Einträge $b_{ij}$, von denen wir nach Induktionsannahme wissen, daß sie zwischen Null und $n^{m-2}$ liegen. Für den $ik$-Eintrag der Matrix $A^m = A^{m-1}A$ ist dann

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{jk} \leq \sum_{j=1}^{n} n^{m-2} \cdot 1 = n \cdot n^{m-2} = n^{m-1} .$$

Also können wir $u_m = 0$ und $o_m = n^{m-1}$ setzen.

Die angegebenen Schranken sind optimal, denn nimmt man für $A$ die Nullmatrix, sind auch alle Einträge von $A^m$ Null, und falls alle Einträge von $A$ gleich Eins sind, sind die Einträge von $A^m$ nach demselben Induktionsbeweis wie eben alle gleich $n^{m-1}$.

*o)* Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** $A_1$ ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung, die den ersten Basisvektor mit dem vierten und den zweiten mit dem dritten vertauscht; da diese Abbildung ihre eigene Umkehrabbildung ist, ist auch $A_1$ seine eigene inverse Matrix; insbesondere ist also $A_1$ invertierbar.

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Spaltenvektoren von $A_2$ ist stets der Vektor mit lauter Einsen als Einträgen; die zugehörige lineare Abbildung hat also nur ein zweidimensionales Bild (aufgespannt etwa von irgendeinem der Spaltenvektoren und dem Vektor mit lauter Einsen als Einträgen) und ist somit nicht invertierbar, genauso wenig wie $A_2$.

Die vier Spaltenvektoren von $A_3$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die zu $A_3$ gehörige lineare Abbildung ist also surjektiv und damit nach der Dimensionsformel auch injektiv, also bijektiv und somit umkehrbar. Damit ist auch $A_3$ invertierbar.

In $A_4$ schließlich ist die dritte Spalte Summe der ersten beiden, die zugehörige lineare Abbildung ist also nicht surjektiv, und damit ist $A_4$ nicht invertierbar.

(Wenn man über die (Spalten-)Ränge argumentieren möchte: $\operatorname{Rang} A_1 = \operatorname{Rang} A_3 = 4$ und $\operatorname{Rang} A_2 = \operatorname{Rang} A_4 = 2$.)

*p)* Was ist $e^{\pi i}$ ?

**Lösung:** $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

*q)* Was ist (näherungsweise) $e^i$ ?

**Lösung:** $e^i = \cos 1 + i \sin 1 \approx 0{,}5403023059 + 0{,}8414709848i$.

*r)* Finden Sie alle komplexen Zahlen $z$ mit $z^3 = 1$ !

**Lösung:** Schreiben wir $z = re^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten, so ist $z^3 = r^3 e^{3i\varphi}$; das ist genau dann gleich Eins, wenn $r = 1$ ist und $3\varphi$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$. Die Winkel $0 \le \varphi < 2\pi$ mit dieser Eigenschaft sind $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ und $\varphi = \frac{4\pi}{3}$; im Winkelmaß sind das $0°, 120°$ und $240°$.

$$\begin{aligned} \cos 120° &= \sin(90° - 120°) = \sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2} \\ \cos 240° &= \cos(180° + 60°) = -\cos 60° \ = -\sin 30° = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und die Sinuswerte lassen sich daraus über die Beziehung $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ bestimmen, wenn man beachtet, daß der Sinus zwischen $0°$ und $180°$ positiv ist und zwischen $180°$ und $360°$ negativ. Somit ist

$$\begin{aligned} \sin 120° &= \sqrt{1 - \sin^2 120°} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{und} \\ \sin 240° &= -\sqrt{1 - \sin^2 240°} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Die drei Lösungen sind also

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$