

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 10. Mai 2006

$\varphi: V \rightarrow W$  sei eine lineare Abbildung und  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  sei eine Teilmenge von  $V$ .

- a) *Richtig oder falsch:* Ist  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  linear unabhängig, so auch  $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ .  
 b) *Richtig oder falsch:* Ist  $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$  linear unabhängig, so auch  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ .  
 c) *Richtig oder falsch:* Betrachtet man  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .  
 d) *Richtig oder falsch:* Betrachtet man  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .  
 e) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \{\sin t, t, t^2\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad M_4 = \{e^t, e^{2t}, e^{3t}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$M_5 = \{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad M_6 = \{e^t, \sinh t, \cosh t\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

- f) *Richtig oder falsch:* Ist  $M$  ein Erzeugendensystem von  $V$  und  $\varphi: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so ist  $\varphi(M) = \{\varphi(\vec{v}) \mid \vec{v} \in M\}$  ein Erzeugendensystem von  $\text{Bild } \varphi$ .  
 g) Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens  $n$ ?  
 h) Welche Dimension hat der Untervektorraum  $W = \{a \sin^2 t + b \cos^2 t + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  von  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?  
 i) Ergänzen Sie die Menge  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^2$ !  
 j) *Richtig oder falsch:* Sind  $U_1, U_2$  Untervektorräume eines Vektorraums  $V$ , so gibt es Basen  $B_1$  von  $U_1$  und  $B_2$  von  $U_2$ , so daß  $B_1 \cap B_2$  eine Basis von  $U_1 \cap U_2$  ist.  
 k) *Richtig oder falsch:*  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  ist eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .  
 l) *Richtig oder falsch:* Die Polynome  $x^2, x^2 + x$  und  $x^2 + x + 1$  bilden eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.  
 m) Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die den Vektor mit Komponenten  $x, y, z, w$  auf  $\begin{pmatrix} x + y - z \\ y + z - w \end{pmatrix}$  abbildet?  
 n) Berechnen Sie die folgenden Summen in  $\mathbb{F}_2^3$ :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$$

- o) Finden Sie einen Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^3$  mit  $\vec{v} + \vec{x} = \vec{u}$ !  
 p) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung  $\varphi: \mathbb{F}_2^4 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$ , die den Vektor mit Komponenten  $a, b, c, d$  auf  $\begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix}$  abbildet!  
 q) *Richtig oder falsch:* Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  aus  $\mathbb{F}_2^3$  sind linear unabhängig.