Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3. Mai 2006

a) Bestimmen Sie den Wert des Polynoms $f(x) = x^{10} + x^5 - x^3 + 1$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$!

b) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, xy = 0 \right\}, \quad V_5 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0 \right\}, \quad V_6 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2 \right\}$$

c) Bestimmen Sie alle Elemente der folgenden Mengen und geben Sie an, welche dieser Mengen ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist!

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{F}_2, \; x(y+z) = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{F}_2, \; x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

d) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k-Vektorraum mit Vektorraddition $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$.

e) *Richtig oder falsch:* Sind $\varphi, \psi \colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so sind auch die Abbildungen $\varphi \pm \psi \colon V \to W$ mit $(\varphi \pm \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) \pm \psi(\vec{v})$ linear.

f) Welche der folgenden Vorschriften definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$? Was sind dann Kern und Bild? $\quad \pi_0\big((x, y, z)\big) = (x, y, 0)\,, \quad \pi_1\big((x, y, z)\big) = (x, y, 1)\,,$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y + 2z \\ z + 2 \end{pmatrix}, \quad \psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x + 4y + 5z \end{pmatrix}, \quad \omega\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ xy + yz + xz \\ xyz \end{pmatrix}$$

g) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$U_1 = \left\{ f \in V \mid f(t) = f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \right\}$, $U_2 = \left\{ f \in V \mid f(t) = -f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \right\}$,
$U_3 = \left\{ f \in V \mid f(t) = f(t^2) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \right\}$, $U_4 = \left\{ f \in V \mid f(t) = f(t+1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \right\}$

h) Zeigen Sie, daß $\varphi \colon \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie Kern und Bild!

i) Zeigen Sie, daß $W = \left\{ a \sin t + b \sin 2t + c \sin 4t \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi \colon \begin{cases} W \to \mathbb{R}^5 \\ f \mapsto \left((f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{3\pi}{4}\right), f(\pi) \right) \end{cases} !$$

j) Definiert die Vorschrift $\varphi(f) = \frac{df}{dt}$ eine lineare Abbildung von W nach W?

k) Wie steht es mit $\psi(f) = \frac{d^2 f}{dt^2}$?