Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26. April 2006

Je nachdem, wie weit die Vorlesung kommt, können möglicherweise noch nicht alle dieser Aufgaben bearbeitet werden.

a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = i(1-i),\ \ z_2 = (3+i)(3-i),\ \ z_3 = (i+1)(i-1),\ \ z_4 = i^{2006},\ \ z_5 = \dfrac{5+2i}{2+3i},\ \ z_6 = \dfrac{4+i}{2-i}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z_1 &= i(1-i) = i\cdot 1 - i\cdot i = i-(-1) = 1+i\\
z_2 &= (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9-(-1) = 10\\
z_3 &= (i+1)(i-1) = i^2 - 1^2 = -1-1 = -2\\
z_4 &= i^{2006} = (i^2)^{1003} = (-1)^{1003} = -1\\
z_5 &= \frac{5+2i}{2+3i} = \frac{(5+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-2\cdot(-3)-15i+4i}{2^2+3^2} = \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i\\
z_6 &= \frac{4+i}{2-i} = \frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8-1+4i+2i}{2^2+1^2} = \frac{7}{5} + \frac{6}{5}i
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie für $z = \sqrt{3}+i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2006} sowie den Betrag!

Lösung:

$$\begin{aligned}
z^2 &= (\sqrt{3}+i)^2 = (\sqrt{3})^2 + i^2 + 2\sqrt{3}\,i = 2 + 2\sqrt{3}\,i\\
z^3 &= z^2\cdot z = (2+2\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}\sqrt{3}\,i = 8i\\
z^4 &= z^3\cdot z = 8i\cdot(\sqrt{3}+i) = 8\sqrt{3}\,i - 8i^2 = -8 + 8\sqrt{3}\,i\\
z^{16} &= z^{15}\cdot z = (z^3)^5\cdot z = (8i)^5\cdot(\sqrt{3}+i) = 8^5 i^5\cdot(\sqrt{3}+i) = -2^{15} + 2^{15}\sqrt{3}\,i\\
z^{256} &= z^{255}\cdot z = (z^3)^{85} = (8i)^{85}\cdot(\sqrt{3}+i) = 2^{255} i\cdot(\sqrt{3}+i) = -2^{255} + 2^{255}\sqrt{3}\,i\\
z^{2006} &= z^(3\cdot 668+2) = (z^3)^{668}\cdot z^2 = (8i)^{668}\cdot(2+2\sqrt{3}\,i) = 2^{2004}\cdot i^{668}(2+2\sqrt{3}\,i)\\
&= 2^{2005} + 2^{2005}\sqrt{3}\,i\,, \quad \text{mit}\\
2^{2005} &= 3674018224877614477545066243768582348871416646683824641528456757842452036455585004341310356212820063739027086844759880875030780674761777060562980339733290193252159652649992960022040932743681435885725663682031559833011694836684427646314144833294923327068959889861196761886228147379945972785157255103050645803013405087502672179276143513853249884829912848013728086934612026576704260231561001336360572266150611167852685380064696955468929349115301864049308461884866941457758649074869505253122622630932178648172173618679232496907161165421825744285288825084244005613936921626330968666174894520389915236768940032\\
|z| &= \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - i^2} = \sqrt{3+1} = 2
\end{aligned}$$

c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!

Lösung: Aus der vorigen Aufgabe wissen wir, daß für $z_0 = \sqrt{3}+i$ gilt $z_0^3 = 8i$, also $(z_0^2)^3 = z_0^6 = -64 = -4^3$. Somit hat $\frac{1}{4}z_0^2 = \frac{2+2\sqrt{3}\,i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dritte Potenz -1.

d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = 1$!

Lösung: Da $(-z)^3 = -z^3$ für jede komplexe Zahl z, können wir einfach $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ setzen.

e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$!

Lösung: $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$

f) Richtig oder falsch: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Lösung: *Richtig,* denn für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ ist

$$\overline{z+w} = \overline{(x+u) + i(y+v)} = (x+u) - i(y+v) = (x - iy) + (u - iv) = \overline{z} + \overline{w}\,.$$

g) Richtig oder falsch: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Lösung: *Richtig,* denn für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ ist

$$\overline{zw} = \overline{(xu - yv) + i(xv + yu)} = (xu - yv) - i(xv + yu)$$

und auch

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (x - iy)(u - iv) = (xu - yv) - i(xv + yu)\,.$$

h) Bestimmen Sie für $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

Lösung: Für gerade $k = 2\ell$ ist $(ix)^k = i^k x^k = (-1)^\ell x^k$, für ungerade $k = 2\ell + 1$ ist $(ix)^k = i^k x^k = i \cdot (-1)^\ell x^k$. Somit ist

$$f(ix) = \sum_{\ell=0}^{[n/2]} (-1)^\ell x^{2\ell} + i \sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^\ell x^{2\ell+1}\,.$$

i) Welche der folgenden Mengen sind, mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen bzw. reeller Funktionen, Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0, \quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad k_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad k_4 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\},$$
$$k_5 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_7 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Lösung: k_1 ist kein Körper, da beispielsweise das Element zwei weder ein additives noch ein multiplikatives Inverses hat. k_2 ist schon deshalb keiner, weil die Null und die Eins beide rational sind; in k_3 gibt es keine additiven Inversen. Auch k_4 ist schon deshalb kein Körper, weil diese Menge kein Nullelement enthält.

k_5 ist ein Körper, denn $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ und $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ liegen wieder in k_5, genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}\,.$$

Aus demselben Grund ist auch k_6 ein Körper: $(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}$ und $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ liegen wieder in k_6, genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}\,,$$

denn wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ kann der Nenner dann nicht verschwinden.

k_7 schließlich ist kein Körper, denn beispielsweise liegt $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ nicht in k_7. (Das ist allerdings schon im wesentlichen die einzige Ausnahme:

$k_8 = \left\{a + b\sqrt[3]{3} + c\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ ist ein Körper!)

j) Richtig oder falsch: Ist k ein Körper, so wird auch $k \times k$ mit der Addition $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ und der Multiplikation $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ zum Körper.

Lösung: *Falsch,* denn beispielsweise haben $(1, 0)$ und $(0, 1)$ keine multiplikativen Inversen.

k) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 0 \right\},$$

$$V_5 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; f'(2) = 0 \right\}, \qquad V_6 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; f'(2) = 2 \right\}$$

($\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.)

Lösung: *siehe Übungen der nächsten Woche!*

l) Richtig oder falsch: Ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k-Vektorraum mit Vektorraddition $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$.

Lösung: *siehe übungen der nächsten Woche!*