Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26. April 2006

Je nachdem, wie weit die Vorlesung kommt, können möglicherweise noch nicht alle dieser Aufgaben bearbeitet werden.

a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = i(1-i)$, $z_2 = (3+i)(3-i)$, $z_3 = (i+1)(i-1)$, $z_4 = i^{2006}$, $z_5 = \dfrac{5+2i}{2+3i}$, $z_6 = \dfrac{4+i}{2-i}$

b) Berechnen Sie für $z = \sqrt{3}+i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2006} sowie den Betrag!

c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!

d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = 1$!

e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$!

f) *Richtig oder falsch:* Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

g) *Richtig oder falsch:* Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

h) Bestimmen Sie für $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

i) Welche der folgenden Mengen sind, mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen bzw. reeller Funktionen, Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0, \quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad k_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad k_4 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\},$$
$$k_5 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_7 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

j) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper, so wird auch $k \times k$ mit der Addition $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ und der Multiplikation $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ zum Körper.

k) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, xy = 0 \right\},$$
$$V_5 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0 \right\}, \qquad V_6 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2 \right\}$$

($\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.)

l) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k-Vektorraum mit Vektorraddition $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$.