

21. Juli 2006

13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq 1\}$ ist einfach zusammenhängend.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Oberfläche einer Kugel ist einfach zusammenhängend.
- 3) *Richtig oder falsch:* Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.
- 4) *Richtig oder falsch:* Verschwindet für ein Vektorfeld $\vec{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Rotation auf ganz \mathbb{R}^3 , so hängt der Wert eines Integral $\int_{\gamma} \vec{V}(x, y, z) ds$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.
- 5) Was ist $\iint_D 1 dx dy$ für $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$?

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmen Sie für den Bereich $B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ die folgenden Integrale:

- a) $\iint_B x dx dy$
- b) $\iint_B xy dx dy$
- c) $\iint_B \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} dx dy$
- d) $\iint_B \sqrt{x^2 + 4y^2} dx dy$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Integrieren Sie das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -x \end{pmatrix}$$

nach dem Satz von GREEN entlang des Dreiecks mit Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie nach dem Satz von GAUSS das Integral

$$\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O}$$

mit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq 1\}$!

K E I N E A B G A B E — — F R O H E F E R I E N !