

14. Juli 2006

12. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Ein konservatives Vektorfeld ist quellenfrei.
- 2) *Richtig oder falsch:* Falls ein Vektorfeld \vec{V} mit antisymmetrischer JACOBI-Matrix über der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion hat, ist es dort konstant.
- 3) *Richtig oder falsch:* Falls für zwei Vektorfelder \vec{V} und \vec{W} auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Kurve γ in U gilt $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma} \vec{W} \cdot d\vec{x}$, so ist $\vec{V}(\mathbf{x}) = \vec{W}(\mathbf{x})$ für alle Kurvenpunkte $\mathbf{x} = \gamma(t)$.
- 4) Was ist das (dreidimensionale) Volumen von $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 100, |z| \leq 1\}$?
- 5) *Richtig oder falsch:* Das Vektorfeld $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y/(x^2+y^2) \\ -x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ hat eine Stammfunktion.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Ein Massenpunkt läuft im ebenen Kraftfeld $\vec{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ auf einem der beiden Bogen des Einheitskreises von $(-1, 0)$ nach $(0, 1)$. Berechnen Sie die Arbeit $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\mathbf{x}$ für beide Möglichkeiten!
- b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ längs des Dreiecks mit Ecken $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 0)$!
- c) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{W}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \end{pmatrix}$ längs der beiden Teilbögen des Einheitskreises, die den Punkt $(1, 0)$ mit $(0, 1)$ verbinden!
- e) Ist eines der Vektorfelder \vec{F} , \vec{V} , \vec{W} konservativ?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie für die Kurve $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto (t - \frac{\ell}{2}, 0, 0)$ das Integral $\int_{\gamma} \frac{ds}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$ für einen festen Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, der nicht auf γ liegt.
- b) Wie verhält sich das Integral, wenn \mathbf{x}_0 gegen einen Punkt auf γ geht?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Das Kurvenstück γ sei gegeben durch $\gamma: \begin{cases} [0, 100\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (2 \cos 2t, 2 \sin 2t, 3t) \end{cases}$.

- a) Beschreiben Sie dieses Kurvenstück geometrisch!
- b) Welche Bogenlänge hat γ ?

Keine Abgabe — Am 21. Juli endet die Vorlesungszeit!