WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

7. Juli 2006

11. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ seien differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $f \circ g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar und $J_{f\circ g}(\boldsymbol{x}) = J_g(\boldsymbol{x}) \cdot J_f\big(g(\boldsymbol{x})\big)$.

2) *Richtig oder falsch:* Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die JACOBI-Matrix von f symmetrisch.

3) Finden Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$!

4) $\vec{V}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei ein mindestens zweimal differenzierbares Vektorfeld. Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}$?

5) Wie sieht die Funktion $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ in Kugelkoordinaten aus?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie: Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ und ein Vektorfeld $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R}^3)$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $\operatorname{div}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div}\vec{V}$

b) $\operatorname{rot}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{V} + f \operatorname{rot}\vec{V}$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{V}) - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Calculate the gradient of the function $f_n\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\} \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n} \end{cases}$ where n is any positive real number!

b) What is the Laplacian Δf_n ?

c) Show that $\Delta f_n \equiv 0 \iff n = \frac{1}{2}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie für zwei Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ die Divergenz von $\vec{V} \times \vec{W}$ auf möglichst kompakte Weise!

b) Zeigen Sie: Das *Spatprodukt* $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ dreier Vektoren ist gleich der Determinante der Matrix mit Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$!

c) Das Spatprodukt dreier Vektoren ist bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; insbesondere ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Wenden Sie diese Formel an auf die „Vektoren“ $\vec{a} = \nabla, \vec{b} = \vec{V}$ und $\vec{c} = \vec{W}$, und vergleichen Sie mit *a)*!

Keine Abgabe – Abgegeben wird diese Woche nur die Klausur!