

16. Juni 2006

8. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ seien zwei Vektoren der Länge zwei; die Länge von $\vec{v} + \vec{w}$ sei drei. Was ist $\vec{v} \cdot \vec{w}$?
- 2) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^3$ seien zwei Vektoren der Länge zwei; die Länge von $\vec{v} + \vec{w}$ sei drei. Was können Sie über $\vec{v} \cdot \vec{w}$ sagen?
- 3) *Richtig oder falsch:* V sei ein EUKLIDISCHER Vektorraum und für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ sei $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ für alle $\vec{w} \in V$. Dann ist $\vec{u} = \vec{v}$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Multiplikation reeller Zahlen macht \mathbb{R} zu einem EUKLIDISCHEN Vektorraum.
- 5) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $(z, w) \mapsto |zw|$ macht \mathbb{C} zu einem HERMITESCHEN Vektorraum.
- 6) *Richtig oder falsch:* \mathbb{C} mit dem Produkt

$$(x + iy) \odot (u + iv) = (xu - 4yv) + 2i(xv - yu) \quad \text{für } x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

ist ein HERMITESCHER Vektorraum.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Let $A = (a_{ij})$ be an invertible $n \times n$ -matrix and $B = A^{-1}$ its inverse matrix. Find an explicit formula for the entry b_{ij} of B with denominator $\det A$ and an $(n-1) \times (n-1)$ -determinant as its numerator!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des durch $x+y+z=0$ definierten Untervektorraums von \mathbb{R}^3 mit seinem Standardskalarprodukt!
- b) Der Vektorraum \mathbb{C}^5 sei mit seinem üblichen HERMITESCHEN Produkt versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2-2i \\ -4i \\ 4+i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -4-i \\ 0 \\ 4+2i \\ 4 \\ 4+i \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraums!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

V sei der \mathbb{R} -Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

- a) Zeigen Sie: Durch $(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.
- b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V !

Abgabe bis zum Freitag, dem 23. Juni 2006, um 12.00 Uhr