Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

9. Juni 2006

7. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Schreiben Sie die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ als Produkt von Transpositionen!

2) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in k^{n \times n}$ sei $A^3 = A$. Dann ist $\det A = 0$ oder $\det A = \pm 1$.

3) Richtig oder falsch: Für $A \in k^{n \times n}$ und $\lambda \in k$ ist $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

4) Richtig oder falsch: Die Matrix $A \in k^{n \times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$. Dann hat $2A$ die Eigenwerte $2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_n$.

5) Berechnen Sie die Determinante der vom letzten Übungsblatt her bekannten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 \end{pmatrix}.$$

(Sie können das Ergebnis der dortigen Aufgabe 1 als bekannt voraussetzen.)

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$!

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Die Determinante von $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $(-1)^{n-1}(n-1)$.
(Hinweis: Subtrahieren Sie die letzte Spalte von der ersten!)

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$!

b) Show that $\mathbb{R}^3$ has a basis consisting of eigenvectors of A!

c) Write down A with respect to this basis!

Abgabe bis zum Freitag, dem 16. Juni 2006, um 12.00 Uhr