

5. Mai 2006

2. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.
- 3) *True or false:* If the vectors $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, and \vec{b}_4 form a basis of a vector space V over \mathbb{R} , then so do $4\vec{b}_4, 3\vec{b}_3, 2\vec{b}_2$, and $\frac{1}{7}\vec{b}_1$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Jeder Untervektorraum von \mathbb{Q}^n hat eine Basis aus Vektoren mit ganzzahligen Einträgen.
- 5) Berechnen Sie in \mathbb{F}_2^{10} die Summe der beiden Vektoren $\vec{v} = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$ und $\vec{w} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$!
- 6) Finden Sie einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^{10}$ mit $\vec{v} + \vec{x} = \vec{w}$!

Problem 1: (5 points)

- a) Show that the vectors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^3 are linearly independent!
- b) Find three real numbers $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that $[\vec{u}, \vec{v}] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\}$ for these two vectors \vec{u}, \vec{v} !
- c) For an arbitrary vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, show that \vec{u}, \vec{v} and \vec{w} generate \mathbb{R}^3 if and only if $ap + bq + cr \neq 0$!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- a) Welche Dimension hat der Vektorraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 5z = 0 \right\} \leq \mathbb{R}^3$?
- b) Bestimmen Sie eine Basis von U !
- c) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von \mathbb{R}^3 !

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = [\sinh t, \cosh t, \sinh^2 t, \cosh^2 t, e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}] \leq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})!$$

Dabei ist $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

- b) Zeigen Sie: Das Bild der linearen Abbildung $\varphi: U \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \mapsto \frac{df}{dt}$ liegt in U .
- c) Bestimmen Sie eine Basis des Bilds von φ !

Abgabe bis zum Freitag, dem 12. Mai 2006, um 12.00 Uhr