

28. April 2006

1. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die leere Menge ist ein Vektorraum über sich selbst.
- 2) *Richtig oder falsch:* Für $x, y \in \mathbb{F}_2$ gilt die „binomische Formel“

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 = (x + y)(x - y) = x + y.$$

- 3) *Richtig oder falsch:* \mathbb{R} ist ein \mathbb{F}_2 -Vektorraum bezüglich der üblichen reellen Addition und der Skalarmultiplikation $0 \cdot x = 0$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Sind $\varphi: U \rightarrow V$ und $\psi: V \rightarrow W$ lineare Abbildungen, so ist auch die Hintereinanderausführung $\psi \circ \varphi: \begin{cases} U \rightarrow W \\ \vec{u} \mapsto \psi(\varphi(\vec{u})) \end{cases}$ linear.
- 5) *Richtig oder falsch:* Ist $\varphi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, die der Bedingung $\varphi \circ \varphi = \varphi$ genügt, so ist φ entweder die Nullabbildung oder die Identität.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Die reellen Polynome vom Grad höchstens drei bilden einen \mathbb{R} -Vektorraum.
- b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ bilden die Polynome f vom Grad höchstens drei mit $f(1) = a$ einen Untervektorraum?
- c) Ist auch die Menge aller reeller Polynome vom Grad genau drei ein \mathbb{R} -Vektorraum?
- d) Ist auch die Menge *aller* reeller Polynome ein \mathbb{R} -Vektorraum?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 5y - z \\ x - 5y + z \end{pmatrix} \end{cases}$ ist linear.
- b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von φ !

Problem 3: (5 points)

- a) Show that $V = \{a \sin 2t + b \cos 3t \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ is a vector space over \mathbb{R} !
- b) Determine whether $\varphi(f) = \frac{df}{dt}$ defines a linear map $V \rightarrow V$!
- c) Compute the kernel and the image of the sampling map

$$\varphi: \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ f \mapsto (f(0), f(\frac{1}{2}\pi), f(\pi), f(\frac{3}{2}\pi), f(2\pi), f(\frac{5}{2}\pi)) \end{cases} !$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 5. Mai 2006, um 12.00 Uhr