Vordiplomsklausur Mathematik
für Technische Informatiker

1. Oktober 1998

Diese Klausur besteht aus drei Teilen:

- Analysis I *(25 Punkte)*
- Höhere Mathematik *(50 Punkte)*
- Numerik I *(25 Punkte)*

Für die Bewertung der Klausur ist die erreichte Gesamtpunktzahl maßgebend.

Da die drei Teile von drei verschiedenen Personen korrigiert werden, bearbeiten Sie bitte *auf jedem Bogen Papier nur Aufgaben aus einem der drei Teile.* Es ist weder notwendig noch erwünscht, daß Sie für jede *Aufgabe* ein eigenes Blatt verwenden.

Schreiben Sie bitte **unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen** und sorgen Sie dafür, daß bei jedem Bogen leicht erkennbar ist, zu welchem der drei Klausurteile er gehört. Falsche Zuordnung von Bögen kann die Korrektur für *alle* Teilnehmer um mehrere Tage verzögern.

Das rote Klausurpapier ist für Notizen gedacht und sollte i.a. nicht abgegeben werden. Wenn Sie in Ausnahmefällen die endgültige Form Ihrer Bearbeitung einer Aufgabe nur auf diesem Konzeptpapier haben, machen Sie dort bitte einen gut sichtbaren entsprechenden Vermerk.

Aufgaben zur Höheren Mathematik

50 Punkte

WOLFGANG K. SEILER

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Was ist $\left(\frac{1}{1-i}\right)^{20}$?

2) Richtig oder falsch: Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2i \\ i & 2 & 3i \\ -2i & -3i & -4 \end{pmatrix}$$

sind allesamt reel.

3) P_n sei der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi: P_n \to P_n;\ f \mapsto f'$!

4) Richtig oder falsch: Jedes Vektorfeld $\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ läßt sich als Summe $\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$ schreiben, wobei $\operatorname{div} \vec{U} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{W} = \vec{0}$ ist.

5) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei als Gradient der Funktion $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert. Dann verschwindet der Fluß von $\vec{V}$ durch die Oberfläche einer jeden Kugel.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*
Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert als $f(t) = t^2$, und sie sei periodisch auf $\mathbb{R}$ mit Periode 2π.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-4\pi, 4\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade, oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + ay + a^2 z &= a^3 \quad ! \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (*9 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die sämtlichen Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \; !$$

b) Hat der $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A ?

c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A. Bestimmen Sie den Kern von φ !

d) Welche Dimension hat das Bild von φ ?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Ein Massenpunkt läuft im ebenen Kraftfeld $\vec{F}(\mathbf{x}) = \binom{-y}{x}$ auf einem der beiden Bögen des Einheitskreises von $(-1, 0)$ nach $(0, 1)$. Berechnen Sie die Arbeit $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathbf{dx}$ für die beiden Fälle!

b) Ist das Kraftfeld $\vec{F}(\mathbf{x})$ konservativ?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_D \Big(1 + \sin\big(x^2 + y^2\big)\Big)\, dx\, dy$$

für $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2 + y^2 \le 1\big\}$.

b) Interpretieren Sie den so berechneten Wert als Volumen eines Körpers, und skizzieren Sie dessen Querschnitt!

c) Sei nun $D^* = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 1\big\}$. Skizzieren Sie die Menge D^*, und berechnen Sie das Integral

$$\iint_{D^*} \Big(1 + \sin\big((x-1)^2 + (y-2)^2\big)\Big)\, dx\, dy\ !$$

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Matrix e^A !

b) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= y(t) \end{aligned}$$

c) Geben Sie speziell auch die Lösungskurve an, die zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den Punkt $(3, 5)$ geht!

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?