Lösungen der Aufgaben des HM-Teils

Wolfgang K. Seiler

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Falls ein lineares Gleichungssystem mehrere Lösungen hat, bilden diese einen Vektorraum.

Lösung: *Falsch;* das stimmt zwar für homogene Gleichungssysteme, aber schon beim Gleichungs„system“ $x + y = 1$ ist die Lösungsmenge $\{(x, y) | y = 1 - x\}$ kein Vektorraum.

2) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\varphi(f) = f'(t)$ ist linear.

Lösung: *Richtig,* denn

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)' = \lambda f'(t) + \mu g'(t)\,dt = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\,.$$

3) Richtig oder falsch: Wenn die Niveaulinien der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die sämtlichen Parallelen zur Winkelhalbierenden $y = x$ sind, gibt es eine bijektive Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $f(x, y) = g(x - y)$ ist.

Lösung: *Falsch;* $f(x, y) = \arctan(x - y)$ ist ein Gegenbeispiel, da hier g nur bijektiv auf das Intervall $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ abbildet. Da dies aber eine Spitzfindigkeit ist, die ich bei der Aufgabenstellung übersehen hatte und die am Sinn der Frage vorbeigeht, wird auch *richtig* mit folgender Begründung gewertet: f ist einerseits auf den Geraden $x - y = a$ konstant, hat aber andererseits auf zwei verschiedenen dieser Geraden verschiedene Werte, da dies verschiedene Niveaulinien sind. Also gibt es eine injektive Funktion g, wie behauptet.

4) Was ist $\iiint\limits_{\mathcal{K}} dx\,dy\,dz$ für $\mathcal{K} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 + y^2 \le 5 \wedge |z| \le 2\big\}$?

Lösung: Da der Integrand gleich eins ist, ist das Integral einfach das Volumen des Integrationsbereichs $\mathcal{K}$. Dieser ist ein Zylinder mit Radius $\sqrt{5}$ und Höhe vier, hat also das Volumen $\pi \cdot 5 \cdot 4 = 20\pi$. Wer den Druckfehler 5 statt 5^2 in Gedanken korrigiert hat und auf $\pi \cdot 5^2 \cdot 4 = 100\pi$ kam, erhält ebenfalls volle Punktzahl.

5) Was ist der Korrelationskoeffizient der Datenpaare $(i, -i)$ mit $i = 1, \dots, 10$?

Lösung: Da diese auf einer Geraden mit negativer Steigung liegen, ist der Korrelationskoeffizient gleich -1.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& y &-& 3z &+& u &=& 0 \\ 3x &+& 2y &-& (2a+5)z & & &=& -3 \\ x & & &-& (a+1)z &+& 2u &=& 2 \\ & & y &+& (a-2)z &+& (a-1)u &=& -2+a \end{array}$$

Lösung: Zur Elimination von x subtrahieren wir die erste Gleichung dreimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\begin{aligned}
x + \quad y - \qquad\quad 3z + \qquad\quad u &= 0\\
-y - (2a-4)z - \qquad 3u &= -3\\
-y - \ (a-2)z + \qquad\quad u &= 2\\
y + \ (a-2)z + (a-1)u &= -2+a
\end{aligned}$$

Um y aus den letzten beiden Gleichungen zu entfernen, subtrahieren wir die zweite Gleichung von der dritten und addieren sie zur vierten:

$$\begin{aligned}
x + \quad y - \qquad\quad 3z + \qquad\quad u &= 0\\
-y - (2a-4)z - \qquad 3u &= -3\\
(a-2)z + \qquad 4u &= 5\\
-(a-2)z + (a-4)u &= -5+a
\end{aligned}$$

Addieren wir jetzt noch die beiden letzten Gleichungen zueiander, ist die gewünschte Treppengestalt erreicht:

$$\begin{aligned}
x + \quad y - \qquad\quad 3z + \ u &= 0\\
-y - (2a-4)z - 3u &= -3\\
(a-2)z + 4u &= 5\\
au &= a
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung müssen wir gleich zwei Fälle unterscheiden: Ist $a = 0$, so ist sie für jedes u erfüllt und wir können sie vergessen; in allen anderen Fällen können wir durch u dividieren und erhalten $u = 1$.
Auch die vorletzte Gleichung erfordert eine Fallunterscheidung: Für $a = 2$ wird sie zu $4u = 5$; da $2 \neq 0$ ist muß aber gleichzeitig $u = 1$ sein. Das geht nicht; im Fall $a = 2$ ist das Gleichungssystem daher unlösbar.
Für $a \neq 2$ können wir durch $(a-2)$ dividieren und kommen auf

$$z = \frac{5-4u}{a-2}\,;$$

für $a \neq 0$ ist $u = 1$; Einsetzen ergibt

$$z = \begin{cases} \frac{1}{a-2} & \text{für } a \neq 0, 2 \\ 2u - \frac{5}{2} & \text{für } a = 0 \end{cases}\,.$$

Um die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ weiterhin gleichzeitig behandeln zu können, setzen wir die allgemeine Formel in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$y = 3 - (2a-4)\cdot\frac{5-4u}{a-2} - 3u = 3 - (10-8u) - 3u = -7 + 5u\,,$$

was wir für $a \neq 0$ weiter ausrechnen können zu $y = -2$.
Schließlich muß noch x berechnet werden; nach der ersten Gleichung ist

$$x = 3z - y - u = \frac{15-12u}{a-2} + 7 - 5u + u = \frac{15-12u}{a-2} + 7 - 6u\,.$$

Hier geht es wohl schneller, wenn wir die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ getrennt weiterbehandeln; für $a \neq 0$ ist $u = 1$ und somit

$$x = \frac{3}{a-2} + 1 = \frac{a+1}{a-2}\,.$$

Für $a = 0$ ist

$$x = \frac{15-12u}{-2} + 7 - 6u = -\frac{1}{2}\,,$$

was übrigens genau der Fall $a = 0$ der obigen Formel ist.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \emptyset & \text{für } a = 2 \\ \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 5u - 7, 2u - \frac{5}{2}, u\right) \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\} & \text{für } a = 0 \\ \left\{ \left(\frac{a+1}{a-2}, -2, \frac{1}{a-2}, 1\right) \right\} & \text{für } a \neq 0, 2 \end{cases} .$$

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

V sei der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens vier in x.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

Lösung: z.B. $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, denn jedes Polynom aus V läßt sich eindeutig als Linearkombination dieser Potenzen darstellen.

b) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V;\ f \mapsto f''$!

Lösung: Die zweite Ableitung eines Polynoms verschwindet genau dann, wenn es höchstens linear ist. Also ist der Kern von φ gleich dem Untervektorraum aller höchstens linearer Polynome.

Beim Differenzierung geht der Grad um eins nach unten, so daß f'' für alle $f \in V$ höchstens Grad zwei hat. Jedes solche Polynom kommt auch vor, denn jede Stammfunktion einer seiner Stammfunfunktion liegt in V. Also ist das Bild von φ gleich dem Untervektorraum aller höchstens quadratischer Polynome.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* angegebenen Basis!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren oder, genauer, deren Koeffizientenvektoren. Die zweite Ableitung von 1 oder x verschwindet, die von x^2 ist $2 = 2 \cdot 1$, die von x^3 und x^4 sind $6x$ und $12x^2$. Also ist die Abbildungsmatrix gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Welche Bedingung müssen die reellen Zahlen x und y erfüllen, damit die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind?

Lösung: Die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ muß verschwinden. Nach der SARRUSschen Regel ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 3y + 2x + 2x - 3 - x^2 - 4y = 4x - x^2 - y - 3 .$$

Also muß dieser Ausdruck verschwinden.

b) Beschreiben Sie die Kurve, auf der die entsprechenden Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ liegen!

Lösung: $4x - x^2 - y - 3 = 0$ ist äquivalent zu

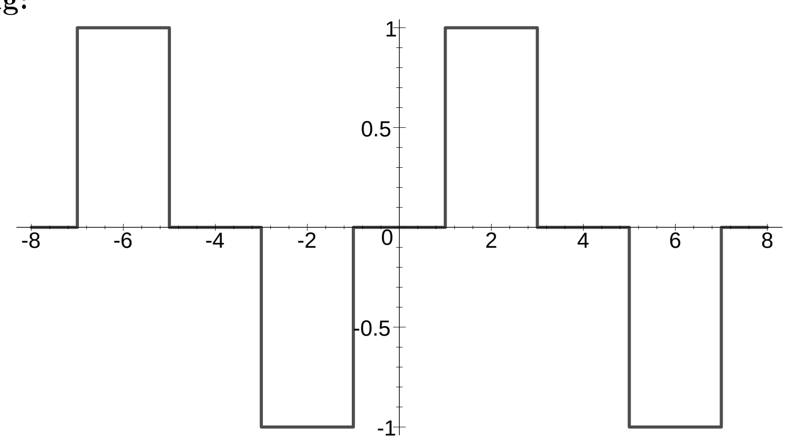
$$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1 .$$

Die Punkte liegen also auf einer nach unten geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt $(2, 1)$.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verschwinde in jedem Intervall der Form $[4n-1, 4n+1]$, sei $+1$ in jedem Intervall der Form $[8n+1, 8n+3]$ und -1 in jedem Intervall der Form $[8n+5, 8n+7]$, wobei n jeweils eine beliebige ganze Zahl sei.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-8, 8]$!

Lösung:



b) Welche Periode hat f ?

Lösung: Acht, denn $t + 8$ liegt für jedes t in der gleichen Art von Intervall wie t.

c) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist ungerade, denn liegt t in einem Intervall der Form $[8n+1, 8n+3]$, liegt $-t$ in einem der Form $[8n+5, 8n+7]$ und umgekehrt; liegt t in einem Intervall der Form $[4n-1, 4n+1]$, so gilt das gleiche für $-t$.

d) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !
Bemerkung: Es reicht, wenn Sie die Koeffizienten in einer Form hinschreiben, die noch spezielle Werte von trigonometrischen Funktionen enthält. Ein Darstellung, die nur noch Konstanten und den Index enthält, ist nicht schwer zu finden, erfordert aber große Sorgfalt im Umgang mit Vorzeichen. Für eine solche Lösung erhalten Sie daher zwei Punkte zusätzlich. Kleine Hilfe: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *und* $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf. Die Periode ist $T = 8$, die Kreisfrequenz also $\omega = 2\pi/8 = \pi/4$. Damit hat die FOURIER-Reihe die Form

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin\frac{j\pi t}{4} .$$

Als Periodenintervall kann man beispielsweise $[0, 8]$ oder $[-4, 4]$ nehmen; letzteres hat den Vorteil, daß die Zahlen etwas kleiner sind und man mögliche Symmetrien leichter erkennt.

Damit ist

$$
\begin{aligned}
b_j &= \frac{2}{T}\int_{-4}^{4} f(t)\sin\frac{j\pi t}{4}\,dt = -\frac{1}{4}\int_{-3}^{-1}\sin\frac{j\pi t}{4}\,dt + \frac{1}{4}\int_{1}^{3}\sin\frac{j\pi t}{4}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{j\pi}\left(\cos\left(\frac{-j\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{-3j\pi}{4}\right)\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{j\pi}\left(\cos\left(\frac{3j\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{j\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{2}{j\pi}\left(\cos\left(\frac{j\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3j\pi}{4}\right)\right)\,.
\end{aligned}
$$

Mit dieser Formel haben wir den Pflichtteil erledigt und kommen zur Kür:

Für gerades j sind die Cosinusargumente Vielfache von $\frac{\pi}{2}$; falls das keine ganzzahligen Vielfachen von π sind, falls also j nicht durch vier teilbar ist, verschwindet der Cosinus sowohl bei $j\pi/4$ als auch bei $3j\pi/4$. Wenn j durch vier teilbar ist, haben wir ein ganzzahliges Vielfaches von π, der Cosinus ist also 1 oder -1, je nachdem ob wir ein geradezahliges oder ungeradzahliges Vielfaches von π haben. Da bei j und bei $3j$ diesbezüglich die gleiche Situation vorliegt, ist die Differenz auch hier null; für gerades j ist also $a_j = 0$.

Für $j = 1$ ist $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, die Differenz ist also $\sqrt{2}$. Da Cosinus periodisch ist mit Periode 2π gilt dies für jedes $j \equiv 1 \pmod 8$, und da der Cosinus gerade ist, gilt es auch für jedes $j \equiv -1 \pmod 8$. Für $j \equiv \pm 3$ sind die Vorzeichen genau umgekehrt und die Differenz somit $-\sqrt{2}$. Insgesamt erhalten wir also

$$
b_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{2\sqrt{2}}{j\pi} & \text{falls } j \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{j\pi} & \text{falls } j \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}
$$

Besser kann man die FOURIERreihe schreiben als

$$
\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\big((2k+1)\frac{\pi}{4}t\big) \quad \text{mit} \quad a_k = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{j\pi} & \text{falls } j \equiv 0,3 \pmod 4 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{j\pi} & \text{falls } j \equiv 1,2 \pmod 4 \end{cases}\,.
$$

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verschwinde für $|t| > 3$ und sei sonst gleich $|t|$. Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f!

Lösung: Wir nutzen zunächst die Symmetrie und das Verschwinden außerhalb des Intervalls $[-3, 3]$ aus:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-3}^{3} |t|\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-3}^{3} |t|\cos\omega t\,dt - i\int_{-3}^{3} |t|\sin\omega t\,dt \\
&= 2\int_{0}^{3} |t|\cos\omega t\,dt = 2\int_{0}^{3} t\cos\omega t\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Das noch verbleibende Integral ist ein typischer Fall für partielle Integration:

$$
\int_0^3 t\cos\omega t\,dt = t\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\sin\omega t}{\omega}\,dt = \frac{3\sin 3\omega}{\omega} + \frac{\cos 3\omega}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\,.
$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega) = \dfrac{6\sin 3\omega}{\omega} + \dfrac{2\cos 3\omega - 2}{\omega^2}\,.$

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion $f(x,y) = 4 - x^2 - 4y^2$ auf der (Voll-)Ellipse $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$!

Lösung: Wer geometrisch denkt, sieht die Lösung mit bloßem Auge; man kann sie aber natürlich auch ausrechnen. Da wir auf einem zweidimensionalen Bereich sind, könnte es zunächst sein, daß ein innerer Punkt relatives und vielleicht sogar absolutes Extremum ist.

Der Gradient von f ist $\nabla f = \binom{-2x}{-8y}$ und verschwindet nur im Nullpunkt; da Quadrate nie negativ werden können, nimmt f in diesem Punkt sein absolutes Maximum auf ganz $\mathbb{R}^2$ an, also erst recht auf der Ellipse, in deren Zentrum der Nullpunkt liegt.

Alle anderen Extrema müssen auf dem Rand angenommen werden; dort müssen also $\nabla f = \binom{-2x}{-8y}$ und $\nabla g = \binom{2x}{y/2}$ proportional sein.

Für $x \neq 0$ ist das nur möglich, wenn der Proportionalitätsfaktor gleich -1 ist; dann muß aber $y = 0$ sein. Genauso folgt aus $y \neq 0$ das Verschwinden von x.

Indem wir in die Gleichung für den Ellipsenrand einsetzen, erhalten wir die vier Möglichkeiten $(\pm 1, 0)$ mit $f(\pm 1, 0) = 3$ und $(0, \pm 2)$ mit $f(0, \pm 2) = -12$. Also ist letzteres das absolute Minimum, wie ja eigentlich schon vor Beginn der Rechnung klar war. (In den Punkten $(\pm 1, 0)$ wird das (absolute) Maximum auf dem Rand der Ellipse angenommen, aber das interessiert uns nicht, da f im Innern noch größer werden kann.)

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 29x(t) = 51\cos 3t + 85\sin 3t\,!$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = (\lambda + 2)^2 + 25 = (\lambda + 2)^2 + 5^2\,,$$

seine beiden Nullstellen sind also $-2 \pm 5i$. Somit hat die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 4\ddot{x}(t) + 29x(t) = 0$$

die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-2t}\big(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t\big) \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, suchen wir, wie bei erzwungenen Schwingungen üblich, nach einer ungedämpften Schwingung mit der erregenden Frequenz, machen also den Ansatz

$$x(t) = a\cos 3t + b\sin 3t\,.$$

Dann ist

$$\dot{x}(t) = -3a\sin t + 3b\cos t \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -9a\cos t - 9b\sin t\,;$$

die Differentialgleichung wird also zu

$$(-9a + 4\cdot 3b + 29a)\cos t + (-9b - 4\cdot 3a + 29b)\sin t = 51\cos 3t + 85\sin 3t\,,$$

d.h.

$$20a + 12b = 51 \quad \text{und} \quad -12a + 20b = 85\,.$$

Wir addieren $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ mal die erste Gleichung zur zweiten und erhalten

$$\left(\frac{36}{5} + 20\right)b = \frac{51\cdot 3}{5} + 85 \quad \text{oder} \quad 136\,b = 51\cdot 3 + 5\cdot 85\,.$$

Wenn man hier nicht den Taschenrechner konsultieren möchte, sollte man langsam ans Kürzen denken. Rechts fällt ins Auge, daß 51 und 85 beide durch 17 teilbar sind; dividiert man 136 dreimal hintereinander durch zwei, landet man ebenfalls bei 17, d.h. $136 = 8 \cdot 17$. Somit ist

$$8\,b = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 34 \quad \text{und} \quad b = \frac{34}{8} = \frac{17}{4}\,.$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt, daß

$$a = \frac{51 - 12b}{20} = \frac{51 - 12 \cdot \frac{17}{4}}{20} = \frac{51 - 3 \cdot 17}{20} = 0$$

ist. (Die Rechnung wird deutlich einfacher, wenn man zunächst b eliminiert, aber das kann man vorher natürlich nicht wissen.)
Die gesuchte spezielle Lösung ist also $\frac{17}{4} \sin 3t$.
Eine beliebige Lösung der gegebenen Differentialgleichung unterscheidet sich von dieser speziellen Lösung um eine Lösung der homogenen Gleichung; die allgemeinste Lösung ist also

$$x(t) = \frac{17}{4} \sin 3t + e^{-2t}\bigl(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t\bigr) \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen mit $x(0) = 0$!

Lösung: Da $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ ist, sind das offensichtlich gerade die Lösungen mit $C_1 = 0$.

c) Bilden diese Lösungen einen Vektorraum?

Lösung: *Nein,* denn die Summe zweier solcher Lösungen hat den ungedämpften Anteil $\frac{17}{2} \sin 3t$, ist also keine Lösung.

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) - 2y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t)\,!$$

Lösung: Die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ des Systems hat das charakteristische Polynom

$$(-3 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 \cdot 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2\,,$$

-1 ist also Eigenwert der algebraischen Vielfachheit eins.
Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat leider nur einen eindimensionalen Lösungsraum, der etwa vom Vektor $\binom{1}{-1}$ aufgespannt wird; die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ist also nur eins.
Das Quadrat der linksstehenden Matrix ist die Nullmatrix (Das folgt schon daraus, daß der Hauptraum zu -1 der ganze $\mathbb{R}^2$ sein muß.), als zweiten Hauptvektor können wir also einen beliebigen Vektor vom Eigenvektor $\binom{1}{-1}$ linear unabhängigen Vektor nehmen, etwa $\binom{0}{1}$.
Mit $\binom{1}{-1}$ und $\binom{0}{1}$ als neuer Basis haben wir die neue Funktion $u(t) = x(t) + y(t)$ und weiterhin $y(t)$ selbst; mit diesen beiden Funktionen wird das Differentialgleichungssystem zu

$$\dot{u}(t) = -x(t) - y(t) = -u(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t) = 2u(t) - y(t)\,.$$

Jetzt gibt es mehrere Möglichkeiten: Natürlich ist klar, daß $u(t) = u_0 e^{-t}$ sein muß, und damit kann man die zweite Gleichung als inhomogene Gleichung betrachten (wo man allerdings etwas aufpassen muß), oder aber wir berechnen die Exponentialfunktion für die neue Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Da die Diagonalmatrix dazu ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix ist, gibt es hiermit keinerlei Probleme:

$$e^{Bt} = e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 2te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Die Lösungen der Differentialgleichung in neuen Koordinaten sind also

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 2te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{-t} \\ y(t) &= (2u_0 t + y_0) e^{-t} \end{aligned} .$$

Uns interessiert nicht $u(t)$, sondern

$$x(t) = u(t) - y(t) = (u_0 - 2u_0 t - y_0) e^{-t} = \big((x_0 - 2(x_0 + y_0)t\big) e^{-t} .$$

Auch bei $y(t)$ können wir noch u_0 durch x_0 ersetzen und erhalten

$$y(t) = (2u_0 t + y_0) e^{-t} = \big(2(x_0 + y_0)t + y_0\big) e^{-t} .$$

b) Welche dieser Lösungen bleiben für $t \to \infty$ beschränkt?

Lösung: Offensichtlich alle, denn e^{-t} geht viel schneller gegen null als eine lineare Funktion gegen unendlich gehen kann; für $t \to \infty$ gehen also alle Lösungsfunktionen gegen null.