Vordiplomsklausur Mathematik für Technische Informatiker

29. März 2000

Diese Klausur besteht aus den drei Teilen

- Analysis I *(25 Punkte)*
- Höhere Mathematik I und II *(50 Punkte)*
- Numerik I *(25 Punkte).*

Für die Bewertung ist ausschließlich die erreichte Gesamtpunktzahl maßgebend.

Die Aufgaben zur Analysis haben einen Gesamtwert von 50 Punkten; gewertet werden allerdings höchstens 25 Punkte. Sie sollten also eine Auswahl treffen.

Da die drei Teile von drei verschiedenen Personen korrigiert werden, bearbeiten Sie bitte *auf jedem Bogen Papier nur Aufgaben aus einem der drei Teile.* Es ist weder notwendig noch erwünscht, daß Sie für jede *Aufgabe* ein eigenes Blatt verwenden. Geben Sie die drei Teile am Ende bitte getrennt ab; es wird drei entsprechend markierte Stapel geben.

Schreiben Sie bitte unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen!

Das farbige Klausurpapier ist für Notizen gedacht und sollte i.a. nicht abgegeben werden. Wenn Sie in Ausnahmefällen die endgültige Form Ihrer Bearbeitung einer Aufgabe nur auf diesem Konzeptpapier haben, machen Sie dort bitte einen gut sichtbaren entsprechenden Vermerk und geben Sie die entsprechenden Blätter mit ab.

Als Hilfsmittel sind nur Taschenrechner ohne Graphikdisplay und ohne höhere Programmiersprache erlaubt. Sie haben vier Stunden zur Bearbeitung der Klausur, wobei es Ihnen überlassen bleibt, wie Sie diese Zeit auf die drei Fächer verteilen möchten.

Informationen über den Fortschritt der Korrektur sowie die Lösungen der HM-Aufgaben werden über den URL http://hilbert.math.uni-mannheim.de/HM/ erreichbar sein.

Aufgaben zur Höheren Mathematik

50 Punkte

WOLFGANG K. SEILER

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Falls ein lineares Gleichungssystem mehrere Lösungen hat, bilden diese einen Vektorraum.

2) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\varphi(f) = f'(t)$ ist linear.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Niveaulinien der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die sämtlichen Parallelen zur Winkelhalbierenden $y = x$ sind, gibt es eine bijektive Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $f(x,y) = g(x-y)$ ist.

4) Was ist $\iiint\limits_{\mathcal{K}} dx\,dy\,dz$ für $\mathcal{K} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2+y^2 \le 5 \wedge |z| \le 2\big\}$?

5) Was ist der Korrelationskoeffizient der Datenpaare $(i,-i)$ mit $i = 1,\ldots,10$?

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
x + y - 3z + u &= 0 \\
3x + 2y - (2a+5)z &= -3 \\
x - (a+1)z + 2u &= 2 \\
y + (a-2)z + (a-1)u &= -2 + a
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

V sei der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens vier in x.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

b) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V;\ f \mapsto f''$!

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* angegebenen Basis!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Welche Bedingung müssen die reellen Zahlen x und y erfüllen, damit die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\x\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

linear abhängig sind?

b) Beschreiben Sie die Kurve, auf der die entsprechenden Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ liegen!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verschwinde in jedem Intervall der Form $[4n-1, 4n+1]$, sei $+1$ in jedem Intervall der Form $[8n+1, 8n+3]$ und -1 in jedem Intervall der Form $[8n+5, 8n+7]$, wobei n jeweils eine beliebige ganze Zahl sei.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-8, 8]$!

b) Welche Periode hat f?

c) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

d) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!
Bemerkung: Es reicht, wenn Sie die Koeffizienten in einer Form hinschreiben, die noch spezielle Werte von trigonometrischen Funktionen enthält. Ein Darstellung, die nur noch Konstanten und den Index enthält, ist nicht schwer zu finden, erfordert aber große Sorgfalt im Umgang mit Vorzeichen. Für eine solche Lösung erhalten Sie daher zwei Punkte zusätzlich. Kleine Hilfe: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *und* $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verschwinde für $|t| > 3$ und sei sonst gleich $|t|$. Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f!

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$ auf der (Voll-)Ellipse $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$!

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 29x(t) = 51\cos 3t + 85\sin 3t\,!$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen mit $x(0) = 0$!

c) Bilden diese Lösungen einen Vektorraum?

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) - 2y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t)\,!$$

b) Welche dieser Lösungen bleiben für $t \to \infty$ beschränkt?

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?