Lösungen der Aufgaben des HM-Teils

Wolfgang K. Seiler

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(3) = f(-3)$ bilden einen Vektorraum.

Lösung: *Richtig:* Sind f, g zwei solche Funktionen, so ist für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch $\lambda f + \mu g$ stetig, und

$$(\lambda f + \mu g)(3) = \lambda f(3) + \mu g(3) = \lambda f(-3) + \mu g(-3) = (\lambda f + \mu g)(-3)\,.$$

2) Richtig oder falsch: Eine $n \times n$-Matrix A mit $A^2 = 0$ hat Determinante null.

Lösung: *Richtig:* Nach dem Multiplikationssatz für Determinanten ist $\det A^2 = (\det A)^2 = 0$, also auch $\det A = 0$.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Niveaulinien einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konzentrische Kreise (oder deren Mittelpunkt) sind, hängt die Funktion, in Polarkoordinaten geschrieben, nur vom Radius r ab.

Lösung: *Falsch,* denn die Kreise müssen nicht den Koordinatenursprung als Mittelpunkt haben. Gegenbeispiel:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \Longrightarrow F(r, \varphi) = r^2 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi) + 2\,.$$

4) Was ist $\iiint_{\mathcal{K}} x\,dx\,dy\,dz$ für $\mathcal{K} = \left\{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| \le 3 \wedge y^2 + z^2 \le 100\right\}$?

Lösung: *Null,* denn der Integrationsbereich ist symmetrisch zur yz-Ebene und der Integrand x ändert sein Vorzeichen bei Spiegelung an dieser Ebenen.

5) Welchen Korrelationskoeffizient haben die vier Datenpaare $(\pm 1, \pm 1)$?

Lösung: *Null,* denn da jeder x-Wert mit jedem y-Wert auftritt, sind die Daten völlig unkorreliert.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Lösung: Subtraktion von zweimal *bzw.* einmal der ersten Gleichung von der dritten macht die letzten beiden Gleichungen zu

$$y + (a+2)z = 1 \quad \text{und} \quad (a-1)y + 4z = 1\,.$$

Subtraktion von $(a-1)$-mal der linken Gleichung von der rechten führt auf

$$\bigl(4-(a+2)(a-1)\bigr)z = 2-a\,.$$

Ausmultiplizieren zeigt, daß

$$4-(a+2)(a-1) = -(a^2+a-6)$$

ist, und das verschwindet für $a=2$ und $a=-3$.
Für $a=2$ wird die Gleichung somit zu $0z=0$, was keinerlei Bedingung an z stellt; für $a=-3$ erhält man die unlösbare Gleichung $0z=5$. Für $a=-3$ ist das Gleichungssystem daher unlösbar.
Für $a\notin\{2,-3\}$ können wir durch den Koeffizienten von z dividieren und erhalten

$$z=\frac{2-a}{-(a-2)(a+3)}=\frac{1}{a+3}\,.$$

Einsetzen in die Gleichung $y+(a+2)z=1$ zeigt, daß dann

$$y=1-(a+2)z=1-\frac{a-2}{a+3}=\frac{1}{a+3}$$

ist, also insbesondere $y=z$, und somit zeigt die erste Gleichung des Systems, daß $x=1$ ist.
Für $a=2$ ist z beliebig, und die Gleichung $y+(a+2)z=1$ zeigt, daß $y=1-4z$ ist. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$x=1-y+z=1-1+4z+z=5z\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a &= \left\{\left(1,\frac{1}{a+3},\frac{1}{a+3}\right)\right\} \quad \text{für } a\notin\{2,-3\}\\
\mathcal{L}_2 &= \bigl\{(5z,1-4z,z)\bigm| z\in\mathbb{R}\bigr\}\\
\mathcal{L}_{-3} &= \emptyset\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}\ !$$

(Hinweis: Falls Sie es dem Schwierigkeiten mit dem charakteristischen Polynom haben: Sie sollten sowohl der Matrix als aus dem charakteristischen Polynom ansehen, daß mindestens eine kleine natürliche Zahl Eigenwert ist.)

Lösung:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 4 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)-(10-2\lambda-4)+4(2-\lambda)\\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)+2-2\lambda\\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)\,.
\end{aligned}$$

Die Matrix hat somit die drei verschiedenen Eigenwerte $1, 2$ und 3, von denen deshalb jeder die algebraische wie auch geometrische Vielfachheit eins haben muß.

Für $\lambda = 1$ ist in

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

die erste Spalte minus der zweiten gleich zweimal der dritten, der Eigenraum wird also aufgespannt von

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Für $\lambda = 2$ ist

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} ;$$

hier führt Addition der ersten Zeile zur zweiten und viermalige Addition zur dritten auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} ,$$

also ist die dritte Komponte eines Eigenvektors gleich viermal der zweiten; setzt man letztere auf eins, wird die erste Komponente zu -2, so daß der Eigenraum aufgespannt wird von

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Für $\lambda = 3$ schließlich ist

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Addition der ersten Zeile zur zweiten und zweimalige Addition zur dritten führt auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

die ersten beiden Komponenten der Eigenvektoren sind also entgegengesetzt gleich. Setzt man die erste auf eins, wird die dritte zu -4, der Eigenraum wird also erzeugt von

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei erzeugt von den Funktionen $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

Lösung: Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, kann zur Erzeugung auf eine der drei Funktionen verzichtet werden, etwa auf $\cos^2 x$. Die restlichen Funktionen sind dann linear unabhängig: Ist nämlich

$$\lambda + \mu \sin x + \nu \cos x + \rho \sin^2 x + \sigma \sin x \cos x = 0 ,$$

so zeigen die Spezialfälle $x = 0$ und $x = \pi$, für die $\sin x$ verschwindet, daß $\lambda + \nu = \lambda - \nu = 0$ ist, also $\lambda = \nu = 0$.
Für $x = \pm\pi/2$ verschwindet $\cos x$ und $\sin x = \pm 1$; wir erhalten

$$\mu + \rho = -\mu + \rho = 0, \quad \text{also} \quad \mu = \rho = 0\,.$$

Dann muß aber auch σ verschwinden, denn $\sin x \cos x$ ist nicht identisch null. Somit sind diese fünf Funktionen linear unabhängig und bilden eine Basis von V.

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f \mapsto f'' + 4f$ definiert eine lineare Abbildung $V \to V$.

Lösung: Die Linearität in f ist ziemlich klar, da Differentiation eine lineare Operation ist: Für zwei differenzierbare Funktionen f, g und zwei reelle Zahlen λ, μ ist

$$(\lambda f + \mu g)'' + 4(\lambda f + \mu g) = \lambda(f'' + 4f) + \mu(g'' + 4g)\,.$$

Zum Nachweis, daß die Vorschrift $\varphi(f) = f'' + 4f$ überhaupt eine Abbildung von V nach V definiert reicht es daher, $\varphi(f)$ für die Elemente der Basis zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 4 \in V \\
\varphi(\sin x) &= -\sin x + 4\sin x = 3\sin x \in V \\
\varphi(\cos x) &= -\cos x + 4\cos x = 3\cos x \in V \\
\varphi(\sin^2 x) &= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 4\sin^2 x = 2 \in V \\
\varphi(\sin x \cos x) &= -4\sin x \cos x + 4\sin x \cos x = 0 \in V
\end{aligned}$$

Somit ist φ eine lineare Abbildung von V nach V.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser linearen Abbildung bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; da diese Bilder in *b)* berechnet wurden, können sie einfach eingesetzt werden; die Matrix wird zu

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild dieser linearen Abbildung!

Lösung: Das Bild wird von den drei Basisvektoren $1, \sin x, \cos x$ aufgespannt und ist somit dreidimensional. Nach der Dimensionsformel hat daher der Kern die Dimension $5 - 3 = 2$.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{2t} + e^{-2t} \quad \text{für } -1 \le t < 1,$$

periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$ durch die Bedingung $f(t+2) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$!

Lösung: Offensichtlich ist $f(t) = f(-t)$, so daß in der FOURIER-Reihe keine Sinusterme auftreten. Der konstante Term ist der Periodenmittelwert

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2t}\,dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-2t}\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{2t}\,dt \quad \textit{wegen der Symmetrie zur } y\textit{-Achse} \\
&= \left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \sinh 2\,.
\end{aligned}$$

Da die Funktion die Periode zwei hat, ist

$$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi\,,$$

in der FOURIER-Reihe treten also die Funktionen $\cos k\pi t$ auf, und für $k > 0$ ist der zugehörige Koeffizient gleich

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\cos k\pi t\,dt = \int_{-1}^{1} e^{2t}\cos k\pi t\,dt + \int_{-1}^{1} e^{-2t}\cos k\pi t\,dt \\
&= 2\int_{-1}^{1} e^{2t}\cos k\pi t\,dt\,.
\end{aligned}$$

Dies läßt sich entweder durch zweimalige partielle Integration ausrechnen oder mit den EULERschen Formeln auf dem Umweg über komplexe Zahlen. Beim zweiten Weg ergibt sich

$$\begin{aligned}
a_k &= 2\int_{-1}^{1} e^{2t}\cdot\frac{e^{k\pi i t} + e^{-k\pi i t}}{2} = \int_{-1}^{1} e^{(2+k\pi i)t}\,dt + \int_{-1}^{1} e^{(2-k\pi i)t}\,dt \\
&= \left.\frac{1}{2+k\pi i}e^{(2+k\pi i)t}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{1}{2-k\pi i}e^{(2-k\pi i)t}\right|_{-1}^{1} \\
&= \frac{e^{2+k\pi i} - e^{-2-k\pi i}}{2+k\pi i} + \frac{e^{2-k\pi i} - e^{-2+k\pi i}}{2-k\pi i} \\
&= \frac{e^2(\cos k\pi + i\sin k\pi) - e^{-2}(\cos k\pi - i\sin k\pi)}{2+k\pi i} \\
&\quad + \frac{e^2(\cos k\pi - i\sin k\pi) - e^{-2}(\cos k\pi + i\sin k\pi)}{2-k\pi i} \\
&= \frac{(e^2 - e^{-2})(-1)^k}{2+k\pi i} + \frac{(e^2 - e^{-2})(-1)^k}{2-k\pi i} \\
&= (-1)^k(e^2 - e^{-2})\cdot\left(\frac{1}{2+k\pi i} + \frac{1}{2-k\pi i}\right) = \frac{(-1)^k\cdot 4(e^2 - e^{-2})}{4+k^2\pi^2} = \frac{(-1)^k\cdot 8\sinh 2}{4+k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: (*5 Punkte*)

Berechnen sie die FOURIER-Transformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 9 - t^2 & \text{für } |t| < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\;!$$

Lösung: Die FOURIER-Transformierte ist nach Definition

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t};$$

da f hier außerhalb des Intervalls $[-3, 3]$ verschwindet, ist also

$$F(\omega) = \int_{-3}^{3} (9 - t^2)e^{-i\omega t}\,dt = 9\int_{-3}^{3} e^{-i\omega t}\,dt - \int_{-3}^{3} t^2 e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Das erste Integral ist problemlos:

$$\int_{-3}^{3} e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-3}^{3} = \frac{1}{-i\omega}\left(e^{-3i\omega} + e^{3i\omega}\right) = \frac{2}{\omega}\sin 3\omega\,.$$

Für das zweite Integral ist zweimalige partielle Integration notwendig:

$$\begin{aligned}\int t^2 e^{-i\omega t}\,dt &= t^2\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t} - \frac{2}{-i\omega}\int te^{-i\omega t}\,dt\\ &= t^2\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t} - \frac{2}{-\omega^2}te^{-i\omega t} + \frac{2}{-\omega^2}\int e^{-i\omega t}\,dt\,,\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} t^2 e^{-i\omega t}\,dt &= \left(\frac{1}{-i\omega}t^2 + \frac{2}{\omega^2}t\right)e^{-i\omega t}\Big|_{-3}^{3} - \frac{2}{\omega^2}\int_{-3}^{3} e^{-i\omega t}\,dt\\ &= \frac{9}{-i\omega}(e^{-3i\omega} - e^{-3i\omega}) + \frac{6}{\omega^2}(e^{-3i\omega} + e^{3i\omega}) - \frac{4}{\omega^3}\sin 3\omega\\ &= \frac{18}{\omega}\sin 3\omega + \frac{12}{\omega^2}\cos 3\omega - \frac{4}{\omega^3}\sin 3\omega\end{aligned}$$

Damit ist

$$F(\omega) = 9\cdot\frac{2}{\omega}\sin 3\omega - \frac{18}{\omega}\sin 3\omega - \frac{12}{\omega^2}\cos 3\omega + \frac{4}{\omega^3}\sin 3\omega = \frac{4\sin 3\omega - 12\omega\cos 3\omega}{\omega^3}\,.$$

Aufgabe 6: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Punkte in der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$, in denen die Funktion $f(x, y) = \sin^2(x + y) + \cos^2(x - y)$ ihr absolutes Maximum annimmt!

Lösung: Der Gradient

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x+y)\cos(x+y) + 2\sin(x-y)\cos(x-y)\\ 2\sin(x+y)\cos(x+y) - 2\sin(x-y)\cos(x-y)\end{pmatrix}$$

verschwindet genau dann, wenn

$$\sin(x+y)\cos(x+y) = \sin(x-y)\cos(x-y) = 0$$

ist. Die Funktion $\sin u\cos u$ verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von $\pi/2$, der Gradient ist also genau dann gleich dem Nullvektor, wenn es ganze Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß

$$x + y = k\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x - y = \ell\frac{\pi}{2}$$

ist. An diesen Punkten ist dann

$$f(x,y) = \sin^2 \frac{k\pi}{2} + \cos^2 \frac{\ell\pi}{2} .$$

Der erste Summand verschwindet für gerades k und nimmt für ungerades k den Maximalwert eins der Funktion $\sin^2$ an; der zweite verschwindet für ungerades ℓ und nimmt für gerades ℓ seinen Maximalwert an. Somit hat f das absolute Maximum zwei, und dieser Wert wird angenommen für ungerades k und gerades ℓ. Da

$$x = \frac{k+\ell}{4}\pi \quad \text{und} \quad y = \frac{k-\ell}{4}\pi$$

ist, gilt dies genau dann, wenn x und y ungeradzahlige Vielfache von $\pi/4$ sind und sich um ein ganzzahliges Vielfaches von π unterscheiden.

b) Gibt es auch Punkte auf der Kreis*linie* $x^2 + y^2 = 1$, in denen der in *a)* bestimmte Maximalwert angenommen wird?

Lösung: Falls für einen Punkt (x,y) auf der Kreislinie das absolute Maximum zwei angenommen wird, muß auch dort

$$x + y = k\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x - y = \ell\frac{\pi}{2}$$

sein mit ungeradem k und geradem ℓ. Also ist

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = k\ell\frac{\pi^2}{4} ,$$

wobei $k\ell$ insbesondere eine gerade Zahl sein muß; x^2-y^2 ist also ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\pi^2}{2}$, einer Zahl, die wegen $\pi > 3$ größer als $9/2$ ist. Andererseits ist auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ und damit

$$x^2 - y^2 = x^2 + (1 - x^2) = 1 + 2x^2$$

eine reelle Zahl zwischen eins und drei. Somit wird das Maximum auf der Kreis*linie* nirgends angenommen.

Aufgabe 7: (*7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t) + 3z(t)\\ \dot{y}(t) &= 4y(t) + 5z(t)\\ \dot{z}(t) &= 6z(t) \quad !\end{aligned}$$

Lösung: Der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

sieht man sofort der drei Eigenwerte $1, 4$ und 6 an. Mann könnte nun natürlich eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus den zugehörigen Eigenvektoren bestimmen, aber angesichts der einfachen Struktur der Matrix kann man auch einfacher *ad hoc* vorgehen:

Jede Komponente einer Lösung ist eine Linearkombination der drei Funktionen e^t, e^{4t} und e^{6t}, wobei man zumindest die dritte Komponente sofort sieht: $\dot{z}(t) = 6z(t)$ hat genau die Funktionen

$$z(t) = ce^{6t} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

als reellwertige Lösungsfunktionen.
Da $x(t)$ auf der rechten Seite der Gleichung für $\dot{y}(t)$ nicht vorkommt, hat $y(t)$ die Form

$$y(t) = \alpha e^{4t} + \beta e^{6t} .$$

Für diese Funktion ist

$$\dot{y}(t) = 4\alpha e^{4t} + 6\beta e^{6t} .$$

Mit $z(t) = ce^{6t}$ muß andererseits gelten

$$\dot{y}(t) = 4y(t) + 5z(t) = 4\alpha e^{4t} + 4\beta e^{6t} + 5ce^{6t} ,$$

d.h. $2\beta = 5c$ oder $\beta = 5c/2$. Die allgemeine Lösung des Systems aus den letzten beiden Differentialgleichungen ist also

$$y(t) = be^{4t} + \frac{5}{2}ce^{6t}, \quad z(t) = ce^{6t} \quad \text{mit} \quad b, c \in \mathbb{R} .$$

Dies setzen wir in die erste Gleichung ein:

$$\dot{x}(t) = x(t) + 2be^{4t} + 5ce^{6t} + 3ce^{6t} = x(t) + 2be^{4t} + 8ce^{6t} .$$

Mit dem Ansatz

$$x(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{4t} + \gamma e^{6t}$$

ist dann einerseits

$$\dot{x}(t) = \alpha e^{t} + 4\beta e^{4t} + 6\gamma e^{6t} ,$$

andererseits muß gelten

$$\dot{x}(t) = x(t) + 2y(t) + 3z(t) = \alpha e^{t} + \beta + be^{4t} + \gamma e^{6t} + 2be^{4t} + 8ce^{6t} ,$$

also muß gelten

$$3\beta = 2b \quad \text{und} \quad 5\gamma = 8c .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{t} + \frac{2}{3}be^{4t} + \frac{8}{5}ce^{6t} \\ y(t) &= be^{4t} + be^{4t} + \frac{5}{2}ce^{6t} \qquad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \\ z(t) &= ce^{6t} \end{aligned}$$

die allgemeinste Lösung des Differentialgleichungssystems.

b) Welche dieser Lösungen bleibt für $t \to \infty$ beschränkt?

Lösung: Da keine der drei Funktionen e^{t}, e^{4t} und e^{6t} für $t \to \infty$ beschränkt bleibt, bleibt nur die Nullösung für $t \to \infty$ beschränkt.

Aufgabe 8: *(7 Punkte)*
Bestimmen Sie alle zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $x(t)$, für die gilt:

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 34x(t) = 33 \sin t + 6 \cos t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \ !$$

Lösung: Die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 34x(t) = 0$$

hat die charakteristische Gleichung $r^2 + 6r + 34 = 0$. Quadratische Ergänzung führt zu

$$(r+3)^2 + 25 = 0 \quad \text{oder} \quad r = -3 \pm \sqrt{-25} = -3 \pm 5i ,$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$x(t) = e^{-3t}(\alpha \cos 5t + \beta \sin 5t)\,.$$

Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung eine reine Schwingung mit Kreisfrequenz eins beschreibt, sollte auch die inhomogene Differentialgleichung eine Lösung dieser Art haben. Für

$$x(t) = a \cos t + b \sin t$$

ist

$$\dot{x}(t) - a \sin t + b \cos t \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -a \cos t - b \sin t\,,$$

also

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 34x(t) = (33a + 6b) \cos t + (33b - 6a) \sin t\,.$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$33a + 6b = 6 \quad \text{und} \quad 33b - 6a = 33$$

mit der offensichtlichen Lösung $a = 0$ und $b = 1$. Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir also $x(t) = \sin t$ und die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = \sin t + e^{-3t}(\alpha \cos 5t + \beta \sin 5t) \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

An der Stelle $t = 0$ ist $x(0) = \alpha$, die Anfangsbedingung $x(0) = 1$ wird also für $\alpha = 1$ erfüllt. Die Funktion

$$x(t) = \sin t + e^{-3t}(\cos 5t + \beta \sin 5t)$$

hat die Ableitung

$$\dot{x}(t) = \cos t + e^{-3t}\big((-5 \sin 5t + 5\beta \cos 5t - 3(\cos 5t + \beta \sin 5t)\big)\,,$$

die an der Stelle null den Wert $1 + 5\beta - 3 = 5\beta - 2$ annimmt; $\dot{x}(0)$ verschwindet also für $\beta = 2/5$, und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$x(t) = \sin t + e^{-3t}\left(\cos 5t + \frac{2}{5} \sin 5t\right)\,.$$